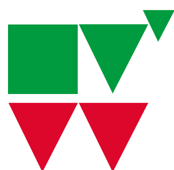
EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

NR.6



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 91 | APRIL 2016

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 91 NR 6

IN DIT NUMMER

Coverfoto: *Ciutat de les Arts i les Ciències* te Valencia.
Fotograaf: Metha Kamminga

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Kort vooraf

Er zijn bronnen die melden dat Pythagoras overleden is in het jaar 500 voor Christus. Dat is dus welgeteld 2516 jaar geleden. Misschien door die mooie combinatie van getallen dat Pythagoras in deze *Euclides* ineens springlevend lijkt te zijn. Jeroen Spandaw laat zien hoe je de stelling van Pythagoras in de brugklas kunt bewijzen en dat dat mooi wiskundeonderwijs op kan leveren. Jan van de Craats schreef een artikel over een soort stelling van Pythagoras, maar dan op een bol. En Ab van der Roest moest tijdens het bijwonen van de CIEAEM conferentie ineens denken aan een bewijs van de stelling van Pythagoras van Multatuli en zag dat die stelling ook weer tevoorschijn komt in het logo van de grote vierjaarlijkse ICME conferentie. Ofwel: de Donald Duck een π special, wij bijna een Pythagoras special. Over Donald Duck gesproken, ik zag net een citaat uit *Donald Duck in Rekenland*. Op de eerste bladzijde van het Deltaplan dat vandaag aangeboden is aan de minister: 'Wiskunde is de sleutel tot alle wetenschappen... tot de kunst en de muziek.' En nu de hele tekst van het Deltaplan te lezen is, zien we ook staan: 'Zoals uit de inrichting van de lerarenkamer blijkt, menen wij dat een eerstegraadslerarenopleiding thuishoort aan de universiteit. In vergelijking met collega's met een hbo-masteropleiding heeft een universitair gevormde leraar een diepere kennis van het vak en een bredere kennis van het nut en het gebruik ervan. Het fundament van een wetenschappelijke houding kan het best worden gelegd door een docent die zelf aan de wetenschap heeft gewerkt en talent herkent.' Gelukkig heb ik nog twee volle dagen bedenktijd om dit mijn hbo-masterstudenten uit te leggen tijdens vakdidactiek...

Tom Goris

HOE NU VERDER MET REKENEN IN HET MBO?

Thomas van den Elsen

De laatste tijd is er veel ophef rondom het vak rekenen, zowel in het vo als in het mbo. In *Euclides* 86-5 (2011) schreef Thomas van den Elsen zijn mening onder de titel: *Rekenen in het mbo: ramp of zegen?* Toen was het nog een vraag, nu is er alleen maar onduidelijkheid. Hier beschrijft hij hoe het verder verliep met de rekentoets in het mbo.

Hoe vreemd kan het gaan?

Na veel discussie over de kwaliteit van het onderwijs besloot het kabinet per 1 augustus 2010 tot het invoeren van verplicht taal- en rekenonderwijs in zowel het vo als in het mbo. Dit viel niet goed uit te leggen aan deelnemers in het mbo, omdat zij in het verleden geen rekenonderwijs hadden genoten en nu meetellende rekenexamens moesten maken. Het mbo gaf aan dat het beter zou zijn om nog enkele jaren te wachten met de invoering en eerst maar eens te beginnen bij het vmbo, maar deze roep vond geen gehoor. Het betekende een forse ingreep in het lesprogramma van het mbo. Er waren nauwelijks rekendocenten te vinden. Voor niveau 4, dat op 3F wordt geëxamineerd,[1] werd Nederlands een meetellend onderdeel in schooljaar 2014-2015 en rekenen zou mee gaan tellen in 2015-2016. Voor één van de onderdelen rekenen, Engels en Nederlands zou een 5 als afgerond eindcijfer gehaald mogen worden. Niveau 2 en 3 lopen een jaar achter met hun 2F examens. Inmiddels weten we dat de invoering wederom is uitgesteld. Veel rekendocenten in het mbo voelen zich niet serieus genomen en het is niet uit te leggen aan ouders en deelnemers dat nu voor de derde keer door de overheid een ander besluit wordt genomen.

> 'IK HOOP DAT EEN ONVOLDOENDE NIET GAAT LEIDEN TOT HET NIET BEHALEN VAN EEN BEROEPSDIPLOMA.'

Wat gebeurde er intussen in het mbo?

Het mbo ging aan het werk en zocht naar wegen om de 'nieuwe' vakken te implementeren. Vaak ging men (de leidinggevende) ervan uit dat een techniekdocent of economiedocent ook wel rekenen kon geven, zonder zich daarbij af te vragen of hij ook vakdidactisch wel voldoende onderlegd was. Ook werden boventallige docenten op het rekenen gezet. Zijn de geldmiddelen van de overheid juist ingezet?
Deze vraag werd gesteld tijdens het Tweede Kamerdebat op 6 oktober jl. Op veel ROC's is veel energie en werk verzet om de vakken Nederlands, Engels en rekenen goed op de kaart te zetten. Op mijn school begonnen we met verschillende rekenmethoden in diverse afdelingen. Een rekenwerkgroep werd geformeerd, er kwamen bijlessen voor de zwakke studenten en we mochten rekenhulpmiddelen aanschaffen. We werken in een vast rekenlokaal oftewel rekendomein. Docenten volgden een cursus rekenen als bleek dat ze onvoldoende vakdidactisch onderlegd waren. Verder zijn er zeven keer per jaar themamiddagen rekenen op mijn ROC en worden regionale netwerkbijeenkomsten bezocht.

Waar heeft het rekenbeleid toe geleid?

Wij hebben gekozen voor een digitale methode die maatwerk biedt. Wij zijn erg tevreden over deze methode, want onze deelnemers scoren substantieel hoger dan het landelijk gemiddelde. Iedere deelnemer werkt op het niveau dat hij aankan. Voor de docent vergt het maatwerk wel de nodige vaardigheid en vakkennis: hij moet snel kunnen schakelen tussen de verschillende 1F en 3F opgaven. Dat je een digitale methode gebruikt, wil nog niet zeggen dat je geen klassikale lessen meer geeft. Met enige regelmaat geef ik zelf een klassikale les over een bepaald onderwerp, maar als de deelnemers achter hun laptop werken, geef ik wel tien tot vijftien korte lesjes aan individuen. Dit werkt prima: de deelnemers vinden het prettig om zo te werken. Deelnemers in de verzorging (niveau 3) en in de verpleegkunde (niveau 4) moeten, naast het landelijke rekenexamen, ook nog het vak *verpleegkundig rekenen* volgen. Voor dit vak moeten de verpleegkundigen een 10 halen. Hierbij gaat het om vochtbalans, medicatie berekenen, zuurstoftoediening, infusie, oplossingen en verdunningen. Onderwijsassistenten krijgen naast het verplichte rekenprogramma het vak *rekendidactiek* waarvoor ze een voldoende moeten scoren.

Niveau 2 deelnemers: kind van de rekening door onzinnige regels

Vmbo-basis studenten worden meestal geplaatst op een mbo niveau 2 opleiding. Deelnemers van niveau 2 zijn over het algemeen doeners die het liefst zo snel mogelijk aan het werk gaan in de praktijk. De meeste opleidingen duren twee jaar, maar er zijn opleidingen die maar één jaar duren. In het laatste geval moet een deelnemer na een half jaar het 2F-rekenexamen maken. Ze hebben over het algemeen weinig binding met de theoretische vakken, laat staan dat ze het rekenen omarmen. De resultaten voor rekenen vallen dan (landelijk gezien) ook erg tegen. Toch vindt de politiek dat deze groep ook het taal- en rekenexamen op 2F niveau moet maken. Dit bewijst maar weer eens de gebrekkige kennis van zaken bij de politiek en de onzinnige regelgeving. Veel deelnemers uit deze groep functioneren bij taal en/of rekenen op het niveau van groep 5 of 6 van de basisschool. Wij worden geacht deze deelnemers in ongeveer één jaar tijd op niveau 2F (eind vmbo-t) te krijgen. Iets wat in zes jaar onderwijs vooraf niet gelukt is, zou in het mbo in één jaar wel moeten lukken. Dit is een onredelijke eis!
Vorig jaar mocht ik meelopen in een verzorgingshuis en zag daar hoe deze studenten als stagiair met bejaarden en dementerenden omgingen. Hoe liefdevol, hoe geduldig en toegewijd. Maar deze deelnemers kunnen vaak niet rekenen en behalen daarom straks geen beroepsdiploma. Omdat zij vaak zwak zijn in rekenen is er een 2A rekenexamen gemaakt, een simpeler 2F rekenexamen. Zo wordt de indruk gewekt dat ook deze deelnemers een 2F rekenexamen maken, maar het zou beter zijn om een 1F rekenexamen te maken voor deze groep en 2F te laten zoals het is, niet eenvoudiger gaan maken of een cijfer erbij gaan geven. Dat schept alleen maar onduidelijkheid en is niet transparant.
Het rekenonderwijs is de laatste jaren al veel verbeterd en het rekenexamen mag van mij blijven maar ik hoop dat een onvoldoende niet gaat leiden tot het niet behalen van een beroepsdiploma, dat zou veel studenten onrecht aandoen en een uitzichtloze toekomst betekenen. Dan schiet de wetgeving zijn doel voorbij.

Meer onzinnige regels in de wetgeving die nageleefd moeten worden.

In tegenstelling tot wat de inspectie wil, maatwerk leveren en differentiëren, heeft de overheid regels gemaakt die de voortgang van de deelnemer juist afremmen. Een deelnemer mag pas examen doen in de tweede helft van zijn opleiding. Het komt echter voor dat deelnemers al na een half jaar het eindniveau hebben gehaald om aan het examen te mogen deelnemen, maar dan moeten zij soms nog anderhalf jaar wachten voordat zij dit examen mogen maken. Dit demotiveert de deelnemer erg. De gedachte van de politiek hierachter is dat het vak moet worden onderhouden, maar als een ander vak na een aantal weken is afgesloten, dan neem je toch ook de eindtoets af om te controleren of de student de zaakjes beheerst, dan wacht je toch niet nog een jaar daarmee.

Mogelijke oplossing voor alle partijen

Veel studenten in het mbo gaan na hun opleiding werken en daarvoor is een beroepsdiploma van belang. Voor niveau 1 en 2 deelnemers zijn de mogelijkheden nogal beperkt. Als daar ook nog bijkomt dat rekenen kan zorgen dat zij zonder diploma de school verlaten, is dat erg triest. Ik wil er daarom voor pleiten dat voor deze groepen rekenen geen onderdeel meer uit gaat maken van hun beroepsdiploma.
Voor niveau 3 deelnemers zou je het cijfer dat gehaald wordt voor het rekenexamen ook niet mee moeten tellen voor het behalen dan het beroepsdiploma, maar je zou wel kunnen vastleggen dat je voor doorstroming naar niveau 4 minimaal een 7 op 2F niveau gehaald moet hebben.
Voor niveau 4 deelnemers zou een soortgelijke regeling kunnen gelden, maar dan voor doorstroom naar het hbo. Op deze manier blijven deelnemers, die hogerop willen, serieus werken voor de vakken, terwijl de deelnemers, die niet voldoen aan de normen, toch een beroepsdiploma (vakdiploma) kunnen behalen. Alleen de deelnemers die de hogere onderwijsvorm aankunnen, mogen door. Zo zal de motivatie toenemen en komt er minder uitval in het vervolgonderwijs. Bovendien zullen docenten minder gefrustreerd raken van de ingewikkelde regelgeving, er zullen minder vroegtijdige schoolverlaters komen, en zal het de werksituatie van de docent ten goede komen. En *last but not least*, het mbo zal nog steeds goede vakmensen afleveren, ook al zal niet iedereen elke som kunnen uitrekenen.

Noot

[1] Het mbo bestaat uit BOL (Beroeps Opleidende Leerweg (voltijd)) en BBL (Beroeps Begeleidende Leerweg(deeltijd)) opleidingen, ieder op vier verschillende niveaus. De leerlingen op een ROC heten *deelnemers*.

Over de auteur:

Thomas van den Elsen volgde eerst de pedagogische academie en werkt als bevoegd docent wiskunde en werktuigbouwkunde bij ROC Ter AA in Helmond. Hij heeft 5 jaar op een lts gewerkt en werkt nu al 32 jaar op ROC Ter AA in Helmond, waarvan 18 jaar bij de sector techniek en 14 jaar bij de teams Zorg & Welzijn en Onderwijsassistenten. Hij zit namens het mbo in de registercommissie van het lerarenregister. E-mailadres: *t.v.d.elsen@roc-teraa.nl*

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*.

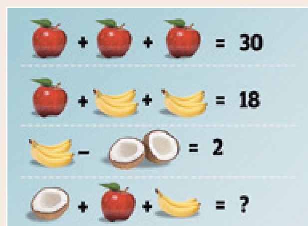
Lerarenopleiding start met bedrijfsstages

Vanaf 1 februari 2016 lopen studenten van de lerarenopleidingen wiskunde, natuurkunde en scheikunde van de Hogeschool Arnhem Nijmegen naast hun gewone stages ook stage bij bedrijven en bij één van de technasia: het Mondial College te Nijmegen en het Candea College te Duiven. Tijdens de startbijeenkomst op 27 januari, bijgewoond door onderwijscollega's, bedrijfsleven en studenten, werden de opzet en doelstellingen van de stages toegelicht. Het project is een zogenaamd *Science Technics Engineering Maths-project* (*STEM*) en sluit goed aan bij *Onderwijs 2032* van Paul Schnabel. Kernwoorden zijn: het echte leven, actuele vraagstukken, motivatie en interessesfeer. Voorafgaand aan de stage oriënteren studenten zich via internet al op de deelnemende bedrijven. Ze verzamelen informatie, wonen een bedrijfspresentatie bij, krijgen een rondleiding en interviewen experts uit de bedrijven over de plaats van hun vakken in het bedrijf. De kennis die de studenten opdoen kunnen ze direct gebruiken tijdens de stages. In totaal nemen de stages bij bedrijven acht dagen in beslag, waarin de studenten minimaal vijf bedrijven bezoeken.
Bron: *Persbericht HAN*

Grootste priemgetal ooit

De ontdekking van het nieuwe grootste priemgetal komt op naam van de Amerikaanse wiskundige Curtis Cooper. Hij was drie jaar geleden ook de ontdekker van het getal dat tot nu toe bekend stond als het grootste priemgetal: $2^{57.885.161} - 1$. Het nieuwe priemgetal telt 22.338.618 cijfers en is daarmee bijna 5 miljoen cijfers langer dan de vorige recordhouder! Het gaat om een zogenoemd Mersennepriemgetal. Het getal is $2^{74.207.281} - 1$. Het recordpriemgetal werd al op 17 september 2015 gevonden, maar door een foutje van de software werd Cooper niet meteen op de hoogte gesteld. Pas in februari 2016 vond hij de gegevens over het nieuwe priemgetal, waarna hij de ontdekking controleerde en wereldkundig maakte.
Bron: *www.nu.nl/wetenschap/4200580/amerikaanse-wetenschapper-ontdekt-grootste-bekende-priemgetal-.html*

Rekentrucjes populair op sociale media



Met enige regelmaat halen grappige rekentrucjes de sociale media. Een voorbeeld is deze: neem je schoenmaat, vermenigvuldig die met 5, tel hier 50 bij op, vermenigvuldig de uitkomst met 20, tel er 1015 bij op en trek je geboortejaar er van af. Het antwoord is je schoenmaat én je leeftijd.Het rekentrucje werkt alleen als je dit jaar nog niet jarig bent geweest, dus als u hiermee een klas wilt imponeren kunt u het beste wachten tot begin januari. Of even een leerling uitzoeken wiens geboortedag achter in het jaar valt natuurlijk. Een ander ogenschijnlijk eenvoudig probleem dat de sociale media haalde en zelfs besproken werd in een populair televisieprogramma is het fruitraadsel. Voor wie het nog niet kent: 16 is níet de oplossing. Natuurlijk is het leuk om met de leerlingen zo'n raadsel te bekijken en op te lossen. Het zijn eigenlijk minilesjes wiskunde!
Bron: *Metro*

Babyloniërs kenden al voorloper van calculus

Vanaf de aarde gezien trekt Jupiter met steeds wisselende snelheden langs de hemel. Babyloniërs slaagden er al enkele decennia tot eeuwen voor het begin van de jaartelling in om uit te rekenen hoe ver Jupiter zich in een bepaalde periode verplaatste. De Nederlandse sterren- en geschiedkundige Matthieu Ossendrijver van de Humboldt Universiteit in Berlijn ontdekte dit aan de hand van enkele kleitabletten. De Babyloniërs maakten daarbij gebruik van een voorloper van onze calculus, methoden waarvan tot nu toe werd aangenomen dat deze pas in de veertiende eeuw in Europa werden ontwikkeld.
Bron: *www.nu.nl/wetenschap/4206046/babyloniers-konden-snelheid-van-jupiter-al-berekenen-.html*

Make the Match



Make the Match is een project in de vorm van een schoolwedstrijd waarin vmbo-leerlingen, vanuit onderzoekend en ontwerpend leren, een technische oplossing bedenken voor een probleem. Het doel van het project is de leerlingen een positieve ervaring met techniek te bieden om hen zo te helpen bij het kiezen van een (technisch) profiel. Het project kost één dagdeel per week gedurende acht à tien weken. Leerlingen vormen tijdens het project in groepjes een eigen bedrijfje en bedenken dan een technische oplossing voor een probleem, werken dit uit in een ontwerp en maken er een prototype van. Het Carmel College Salland in Raalte was tevreden over *Make the Match*. 'Leerlingen hebben soms niet eens in de gaten dat ze eigenlijk met techniek bezig zijn,' aldus een van de docenten. Een meisje dat deelnam was eveneens tevreden: 'Of ik voor techniek kies weet ik nog niet, maar ik weet nu in ieder geval wel dat ik het heel leuk vind om dingen te ontwerpen en te maken.' Meer informatie is te vinden op *http://makethematch.net/*. Bron: *www.techniek-talent.nu/scholen/vmbo/activiteit/make-the-match*

HOE WALLIS AAN ZIJN PRODUCT KWAM

Martin Kindt

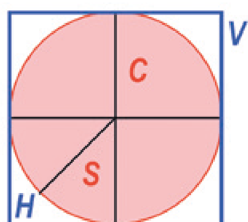
Martin Kindt schrijft deze keer over een van de merkwaardigste formules uit de wiskunde: het product van Wallis. Het betreft hier een oneindig voortlopend patroon van breuken waarvan het product de uitkomst $4/\pi$ heeft. Je kunt dit vinden in universitaire leerboeken en collegedictaten als gevolg van een geraffineerd spel met integralen. Maar Wallis vond zijn product vóór de uitvinding van de differentiaal- en integraalrekening!

Kwadratuur van de cirkel

Tegenwoordig wordt hiervoor de uitdrukking 'mission impossible' gebruikt. De filosoof Thomas Hobbes dacht zijn missie voltooid te hebben, maar dat kwam hem op niet mis te verstane kritiek te staan. Een van de critici was John Wallis die in tegenstelling tot Hobbes geen synthetische maar een analytische weg zocht en dat leidde tot de naar hem genoemde bijzondere formule:

$$\frac{4}{\eth} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \ldots \text{ ad inf.}$$

Voordat ik de stappen die Wallis maakte beschrijf, wil ik de formule een beetje plausibel maken. Het linkerlid van de formule is duidelijk gelijk aan de verhouding van de oppervlakten V en C van respectievelijk een vierkant en zijn ingeschreven cirkel. Met een goed timmermansoog is wel te zien dat sector S een grotere oppervlakte heeft dan het 'hoekje' H met gevolg: $\frac{V}{C} < \frac{3}{2}$.



$$\frac{V}{C} = \frac{4H + 8S}{8S} < \frac{12S}{8S} = \frac{3}{2}$$

figuur 1

'Kleiner dan' betekent hetzelfde als 'een fractie van'.

Probeer $\frac{3}{4}$. Deze schatting is wat te groot:

$$\frac{V}{C} > \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}.$$

Met een beetje goede wil is dit ook te 'zien', het komt neer op $4H > S$. Dan vermenigvuldigen met een breuk groter dan 1, maar natuurlijk kleiner dan $\frac{4}{3}$. De eerste kandidaat is $\frac{5}{4}$. Met de benadering van Archimedes in het achterhoofd – π ligt tussen $\frac{223}{71}$ en $\frac{22}{7}$ – kan worden geverifieerd dat:

$$\frac{V}{C} < \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4}.$$

Er tekent zich een alternerend patroon af, dat ik blijmoedig extrapoleer:

$$\frac{V}{C} > \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6}$$
$$\frac{V}{C} < \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6}$$
$$\frac{V}{C} > \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8}$$

enzovoort.
Het is allemaal nog pure speculatie. Dat de kandidaat-ondergrenzen een stijgende rij vormen, volgt uit:
$5 \times 5 > 4 \times 6$, $7 \times 7 > 6 \times 8$, $9 \times 9 > 8 \times 10$, ...
Algemeen: $n^2 > (n - 1)(n + 1)$.
Net zo is te begrijpen dat de kandidaat-bovengrenzen stap voor stap kleiner worden. Als het patroon ons niet bedriegt, wordt het quotiënt $\frac{V}{C}$ bij dit proces in een steeds kleiner interval geperst. Die intervallen krimpen niet alleen, zij verschrompelen tot één punt. Om dit in te zien beschouw ik de ondergrenzen o_1, o_2, o_3, ... en de bovengrenzen b_1, b_2, b_3, ... met:

$$o_1 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \qquad b_1 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4}$$
$$o_2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \qquad b_2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6}$$
$$o_3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \qquad b_3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{8}$$

....

Er volgt dan:

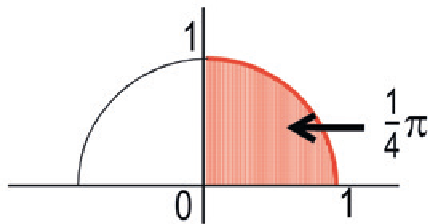
$$b_1 - o_1 = \frac{1}{5} b_1 < \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2}$$
$$b_2 - o_2 = \frac{1}{7} b_2 < \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2}$$
$$b_3 - o_3 = \frac{1}{9} b_3 < \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2}$$

Kort en goed: $b_n - o_n < \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{3}{2}$.

Het rechterlid heeft de limiet 0 voor $n \to \infty$. Hiermee is wel duidelijk geworden dat het product van Wallis convergeert, maar dat de limiet gelijk is aan $\frac{4}{\pi}$ is natuurlijk bij lange na nog niet zeker.

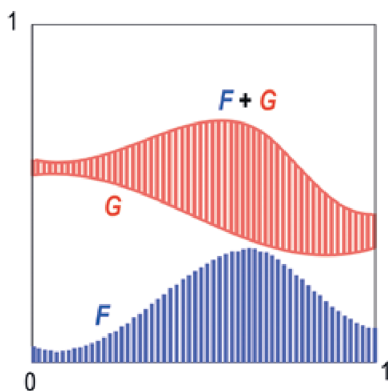
De driehoek van Pascal

Wallis wilde toewerken naar de oppervlakte onder de grafiek van $y = (1 - x^2)^{1/2}$ op het interval [0,1].



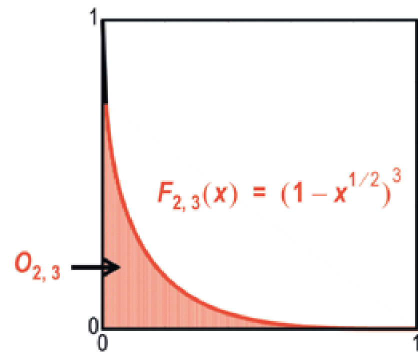
figuur 2

Hij gebruikte een nogal raadselachtige omweg om daar uit te komen. Hij bestudeerde namelijk eerst de op [0,1] gedefinieerde familie van functies gegeven door: $F_{p,n}(x) = (1 - x^{1/p})^n$ met p en n als natuurlijke getallen. Met $p = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ en met $n = 0$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ liet hij de constante functie $x \to 1$ corresponderen. Vervolgens berekende hij de oppervlakte onder de grafieken van $F_{p,n}$. Hij gebruikte de door hemzelf ontdekte regel[1]: oppervlakte onder $y = x^{m/n}$ op [0,1] is $\frac{1}{\frac{m}{n}+1}$. En ook dat de oppervlakte onder de som (of verschil) van twee functies gelijk is aan de som (of verschil) van de oppervlakten van die functies. Dat volgt uit wat nu wel het principe van Cavalieri wordt genoemd: een oneindige som van lijnstukken verandert niet als die lijnstukken stuk voor stuk over een continu veranderende afstand worden verschoven.



figuur 3

In 'moderne' taal: de integraal van de som (of verschil) van twee functies (op eenzelfde interval) is de integraal van de som (of verschil)van die functies. Bijvoorbeeld $p = 2$ en $n = 3$.



figuur 4

Er geldt: $(1 - x^{1/2})^3 = 1 - 3x^{1/2} + 3x - x^{3/2}$

Oppervlakteberekening volgens Wallis geeft:

$$O_{2,3} = 1 - 3 \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1} + 3 \times \frac{1}{1+1} - \frac{1}{\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{10}.$$

De oppervlakte van het omhullende vierkant is dus tien keer zo groot als de oppervlakte onder de grafiek van $F_{2,3}$. Wallis rekende nog veel meer van dergelijke oppervlakteverhoudingen uit en schreef zijn uitkomsten overzichtelijk in een 11 × 11-tabel waarvan hierna een gedeelte is afgebeeld. De eerste rij en de eerste kolom wekken geen verbazing. Verdere bestudering van de tabel levert een verrassing op: de driehoek van Pascal!

p \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	3	6	10	15	21	28
3	1	4	10	20	35	56	84
4	1	5	15	35	70	126	210
5	1	6	21	56	126	252	462
6	1	7	28	84	210	462	924

figuur 5

Kan ik snappen dat in de cel (p, n) het getal $\binom{p+n}{n}$ moet komen? In de kolom $n = 1$ staan de getallen $p + 1$, want de oppervlakte onder de grafiek van $F_{p,1}(x) = 1 - x^{1/p}$ is $1 - \frac{1}{\frac{1}{p}+1} = 1 - \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}$

Nu $n = 2$: $F_{p,2}(x) = (1 - x^{1/p})^2 = 1 - 2x^{1/p} + x^{2/p}$ en $O_{p,2}$ is gelijk aan:

$$1 - \frac{2}{\frac{1}{p}+1} + \frac{1}{\frac{2}{p}+1} = p\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p+1} + \frac{1}{p+2}\right)$$
$$= p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}\right)$$
$$= p\left[\frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{(p+1)(p+2)}\right]$$
$$= p \cdot \frac{2}{p(p+1)(p+2)} = \frac{1}{\binom{p+2}{2}}$$

Het ziet er misschien omslachtig uit en ik had natuurlijk sneller tot dit resultaat kunnen komen, maar de gevolgde rekenwijze geeft mij inzicht. Het verschil van twee opvolgende stambreuken (derde stap) is altijd weer een stambreuk en het is bij de volgende stap duidelijk dat de teller onafhankelijk van p moet zijn. Bovendien kan ik inductief verder. Zo komt er voor $O_{p,3}$:

$$p\left(\frac{1}{p} - \frac{3}{p+1} + \frac{3}{p+2} - \frac{1}{p+3}\right)$$
$$= p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+1} + \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3}\right)$$
$$= p\left[\frac{1}{p(p+1)} - \frac{2}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+2)(p+3)}\right]$$

De middelste breuk kan nu weer worden gesplitst in twee breuken met teller 1 en dit leidt tot

$$= p\left[\frac{2}{p(p+1)(p+2)} - \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}\right]$$
$$= p \cdot \frac{6}{p(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{1}{\binom{p+3}{3}}$$

Zo kunnen de kolommen in de tabel stapsgewijs worden berekend en ontstaat de driehoek van Pascal. Naast de additieve recursie in Pascal's patroon is er ook een multiplicatieve recursie:

$$\binom{p+n}{n} \times \frac{p+n+1}{n+1} = \frac{(p+n)!}{n!\,p!} \times \frac{p+n+1}{n+1}$$
$$= \frac{(p+n+1)!}{(n+1)!\,p!} = \binom{p+n+1}{n+1}$$

Voor de oppervlakten $O_{p,n}$ zou dan moeten gelden:

$$O_{p,n} \times \frac{n+1}{p+n+1} = O_{p,n+1}.$$

Liefhebbers van integraalrekening kunnen deze recursie proberen te bewijzen via slimme partiële integratie en substitutie toegepast op: $O_{p,n} = \int_0^1 F_{p,n}(x)\,dx$

Naar de cirkel

Wallis wilde nu naar de oppervlakte onder de grafiek van $y = (1 - x^2)^{1/2}$, met andere woorden naar de oppervlakte onder de grafiek van $F_{p,n}$ met $p = n = 1/2$. Hij interpoleerde in zijn tabel eerst door een rij $p = 1/2$ tussen te voegen. Dit komt neer op het berekenen van de oppervlakte op [0,1] onder de grafiek van $x \to (1 - x^2)^n$. En zowaar, bovenstaande recursieregel leek nu ook op te gaan. De stap van n naar $n + 1$ zou dan moeten neerkomen op een vermenigvuldiging met

$\frac{n+1}{\frac{1}{2}+n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}$. Dus achtereenvolgens met $\frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \ldots$
Voor $n = 1$ geldt: $O_{\frac{1}{2},1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Voor $n = 2$ moet de oppervlakte worden berekend onder de grafiek van $x \to 1 - 2x^2 + x^4$ en dat geeft: $O_{\frac{1}{2},2} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ en dat is inderdaad gelijk aan $\frac{4}{5} \times O_{\frac{1}{2},1}$.

De lezer kan zelf nog een paar gevallen doorrekenen en constateren dat het ook hier weer goed lijkt te gaan. Voor de scherpslijpers: partiële integratie geeft zekerheid! Hier is een fragment van Wallis' nieuwe tabel:

p \ n	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1/2	1	3/2	15/8	35/16	315/128	693/256
1	1	2	3	4	5	6

figuur 6

Zijn laatste stap was om nu verder te interpoleren in de tabel door cellen met $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ toe te voegen.

Voor $p = 0$ vulde hij overal 1 in. Voor $p = 1$ gebruikte hij de (meetkundig!) te begrijpen regel dat de oppervlakte

onder $y = (1 - x)^{m/2}$ gelijk is aan: $\frac{1}{\frac{m}{2}+1} = \frac{2}{m+2}$. Maar hoe te handelen bij $p = ½$?

p \ n	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
0	1	1	1	1	1	1	1
1/2	1	?	3/2	?	15/8	?	35/16
1	1	3/2	2	5/2	5	7/2	4

figuur 7

Wallis stelde het getal in de cel $p = n = ½$ voor door een vierkantje en paste, geleid door een voorgevoel van permanentie, de multiplicatieve Pascal-recursie toe om de andere vakken in te vullen. De stap van $p = ½$, $n = k + ½$ naar $p = ½$, $n = k + 1½$ gaat volgens die recursieregel gepaard met een vermenigvuldiging met de factor:

$$\frac{\frac{1}{2} + (k + 1\frac{1}{2})}{k + 1\frac{1}{2}} = \frac{k+2}{k+1\frac{1}{2}} = \frac{2k+4}{2k+3}$$

Als ik nu in plaats van Wallis' vierkantje in $p = n = ½$ de letter w schrijf, komt er:

p \ n	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
0	1	1	1	1	1	1	1
1/2	1	w	$\frac{3}{2}$	$w \times \frac{4}{3}$	$\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}$	$w \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5}$	$\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6}$
1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{7}{2}$	4

De rij van quotiënten (groeifactoren) in de regel $p = 1$ is dalend en die eigenschap extrapoleerde Wallis naar de rij van quotiënten in de regel $p = ½$.

Zo kwam hij tot:

$$\frac{w}{1} > \frac{\frac{3}{2}}{w} > \frac{w \times \frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} > \frac{\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}}{w \times \frac{4}{3}} > \frac{w \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5}}{\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}} > \ldots$$

Met als gevolg:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} < w < \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \sqrt{\frac{5}{4}} < w < \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \sqrt{\frac{7}{6}} < w < \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \sqrt{\frac{7}{8}}$$

En hieruit kon hij concluderen dat:

$$w = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \times \ldots\text{ad inf.}$$

Meer over Wallis' queeste is te vinden in [1] en [2].

Wis(h)ful thinking

Wallis maakte zich, in zijn zoektocht naar de benadering van π, voortdurend schuldig aan wishful thinking. Vooral het interpoleren in de driehoek van Pascal was gedurfd. Een actie die Newton zou inspireren tot een uitbreiding van de definitie van binomiaalcoëfficiënt. In moderne notatie: $\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1) \cdot (\frac{1}{2} - 2) \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!}$.

Deze getallen zijn de coëfficiënten in de door Newton gevonden reeksontwikkeling van de functie $x \rightarrow (1 + x)^{1/2}$. Het permanentie-principe in optima forma!

Maar kun je bij Wallis' speculaties wel van 'schuldig' spreken? Het herkennen en uitbreiden van patronen, het gebruik maken van analogieën, het generaliseren, het zijn stuk voor stuk wiskundige kernactiviteiten! Toen ik voor het eerst in een boek over de geschiedenis van de wiskunde een verslag van Wallis' werk las, was ik diep onder de indruk. Tijdens mijn studie was ik het fantastische product van Wallis tegengekomen, maar de weg er naar toe bleef verborgen. Alleen het resultaat met bewijs telde. Wallis' oorspronkelijke aanpak was voor mij een ultiem voorbeeld van een avontuurlijke wiskundespeurtocht. Dat niet iedereen er zo over denkt, blijkt uit [4] waarin Jean-Paul Delahaye de zoektocht van Wallis kwalificeert als een *afzichtelijk prutswerk waarvan de details moeilijk te rechtvaardigen zijn met onze huidige criteria.*[5] Wel spreekt hij van een schitterend resultaat, *dat men later nooit meer vergeten is.* Wallis zal zich misschien pas na numerieke inspectie wat sterker hebben gevoeld. Maar numerieke verificatie moet toen heel wat voeten in de aarde hebben gehad, want de convergentie van Wallis' product is tergend traag. Bij 5000 breuken is het product bij benadering 3,1414355935 en deze breuk bevat nog maar drie correcte decimalen na de komma.

Als slot van dit drieluik over het permanentie-principe wil ik nog een staaltje *wishful thinking* van Euler memoreren. (zie ook [6], *chapter II*). Op school leren we dat factorontbinding van een veelterm hand in hand gaat met bepalen van de nulpunten. Bedenk daarbij dat je bijvoorbeeld in plaats van $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ ook kunt schrijven:

$1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x^2 = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right)$. Euler bedacht dat dit bij een oneindig polynoom misschien ook zou kunnen. Hij was op de hoogte van de reeksontwikkeling van $\sin(x)$, die Newton ontdekt had en gebruikte die zó:

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Omdat deze functie de nulpunten $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 4\pi$, ... heeft, waagde hij het om te veronderstellen:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\ldots$$

Ofwel $\frac{\sin(x)}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$

Een oneindig product! De coëfficiënt van x^2 in dit product is dan gelijk aan de oneindige som:

$$-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\right).$$

In de reeksontwikkeling is die coëfficiënt $-\frac{1}{3!}$ en

zo kwam Euler tot de nu beroemde oneindige som:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Vóór Euler hadden veel grote wiskundigen (ook Wallis) hun tanden stuk gebeten op het vinden van som van de oneindige rij omgekeerde kwadraten. Euler ontleende het vertrouwen in de uitkomst na uitgebreide numerieke testen. Later slaagde hij er in een echt bewijs te vinden. Net als bij Wallis was zijn eerste aanpak een vernuftig staaltje extrapolatie. Het aardige is nog dat als in de oneindige ontbinding

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(1-x^2\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\left(1-\frac{x^2}{16}\right)\ldots \text{ de}$$

substitutie $x = ½$ wordt uitgevoerd, het product van Wallis te voorschijn komt!

Wishful thinking heeft de wiskunde vaak mijlen verder gebracht. In de lerarenopleiding zouden historische voorbeelden zoals dat van Wallis, wat mij betreft veel meer aandacht mogen (of *moeten*) krijgen. En in dit verband durf ik '*wishful thinking*' dan ook wel te vertalen als 'wis(h)kundige denkactiviteit'.

Noten

[1] Kindt, M. (2015), Hoe oneigenlijk is oneigenlijk?, *Euclides, 91*(4)

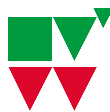
[2] Edwards jr., C.H. (1979), *The Historical Development of Calculus,* New York

[3] Struik, D.J. (1986), *A Source Book in Mathematics 1200 - 1800,* Princeton University Press

[4] Delahaye, Jean-Paul (1997), *Het fascinerende getal* π, de Wetenschappelijke Bibliotheek

[5] Misschien moet het wel heel negatieve 'prutswerk' op het conto van de vertaler worden geschreven, het woord 'knutselwerk' heeft hetzelfde Franse equivalent.

[6] Polya, G. (1954), *Induction and Analogy in Mathematics,* Princeton



NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

MEDEDELING

EXAMENBESPREKINGEN 2016

Er worden geen regionale examenbesprekingen gehouden. U kunt de resultaten van de centrale besprekingen lezen op de website *www.nvvw.nl*:

- voor vwo A, vwo B en vwo C op 21 mei;
- voor vmbo TGK op 21 mei;
- voor havo A en B op 26 mei.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

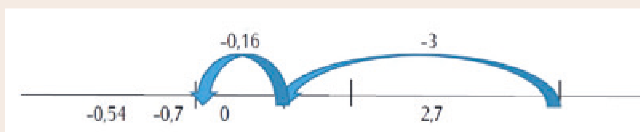
KLEINTJE DIDACTIEK

NEGATIEVE GETALLEN

In de rekenles aan zwakke rekenaars in 5 havo en 5 vwo besprak ik de volgende opgave: 2,7 - 3,16. Het blijkt dat dit type opgaven in geen enkel boek van *Getal en Ruimte* in de onder- of bovenbouw aan bod is geweest (en als ik me niet vergis, geldt dat ook voor de 10e editie). Een snelle check van andere methoden lijkt hetzelfde op te leveren maar ik heb niet alle boeken in mijn bezit. Wel komt rekenen met breuken voor, een enkele methode rekent ook met kommagetallen maar het antwoord is dan altijd positief. Het meest in de buurt van het probleem dat leerlingen hebben, komt hoofdstuk 12.3 van de Wageningse Methode (gratis digitaal in te zien via *www.wageningse-methode.nl*). Een hiaat dus in uw wiskundeboeken! De meeste leerlingen in mijn klas rekenen de opgave onder elkaar uit:

2,70
3,16 –
-1,54

Ik geef drie manieren die ik met hen heb uitgeprobeerd waarop je dit misverstand kunt rechtzetten. Manier 1: met de getallenlijn. Deze manier is het inzichtelijkst, maar vinden leerlingen het lastigst. Wie dit echter snapt, snapt het echt. De eerste getallenlijn is van een leerling die de opgave eerst onder elkaar had gemaakt en nu op een ander (fout) antwoord uitkomt:



Hier kun je bijvoorbeeld de vraag stellen: hoeveel is het van -0,7 naar 0. Het gesprek ging ongeveer zo:
Leerling: 0,7
Docent: En hoeveel is het van 2,7 naar 0?
Leerling: 0,7
Docent: Dus je hebt er hier (wijst naar getallenlijn) 2,7 en daar (wijst naar getallenlijn) 0,7 af gedaan. Hoeveel heb je er dus in totaal afgedaan?
Leerling: dat is geen 3 maar (denkt even na) 3,4.
Vervolgens komen we samen tot de juiste getallenlijn waarbij ook het tweede misverstand -0,7 – 0,16 = -0,54 wordt rechtgezet.



Manier 2: aanvullen. Aanvullen wil zeggen dat je bij het kleinste getal begint en kijkt hoeveel erbij moet om het grotere getal te krijgen. In dit geval: 2,70 + 0,30 + 0,16 = 3,16. Er is dus 0,30 + 0,16 = 0,46 bij gedaan. Een leerling moet dan wel het inzicht hebben dat er altijd een negatief getal uitkomt en dat je dus een min voor het antwoord moet zetten. Dit inzicht krijgen leerlingen met manier 3.
Manier 3: gebruik de rekenmachine om ontdekkingen te doen. Ik laat leerlingen een rijtje zoals het onderstaande met de rekenmachine uitrekenen:

1,8 – 2,15	2,15 – 1,8
3,6 – 5,12	5,12 – 3,6
3,12 – 5,8	5,8 – 3,12

Daarna vraag ik hen wat opvalt. De leerlingen ontdekken dan allemaal de regelmaat en weten nu dat ze dit type opgaven alleen maar onder elkaar mogen zetten als ze het grootste getal bovenaan zetten. Schrijf dan wel eerst de min op voor je gaat rekenen, is mijn advies, want het zou jammer zijn als ze de opgaven nu goed maken maar in de rekenstress een positief getal opschrijven.

Lonneke Boels

DIAGNOSTISCH TOETSEN: HOE WERKT DE DTT WISKUNDE?

Els Boonstra
Marjanne Klom
Wim Lammers
Esther Stok
Rosalie Welsink-Zoller

In het schooljaar 2014–2015 is een pilot gestart met de diagnostische tussentijdse toets (DTT) in het laatste jaar van de onderbouw van vmbo, havo en vwo. De DTT wordt ontwikkeld voor de vakken Nederlands, wiskunde en Engels. De vaststellingscommissie DTT wiskunde laat zien hoe de DTT werkt.

Het College voor Toetsen en Examens (het CvTE) voert deze meerjarige pilot uit in nauwe samenwerking met het onderwijsveld (zie kader 1). In het eerste pilotjaar (2014–2015) namen honderd scholen vrijwillig deel aan een *pretest*. In het huidige schooljaar - het tweede pilotjaar - is het aantal scholen dat deelneemt aan de pilot bijna verdrievoudigd: leerlingen van ruim 280 scholen hebben in februari 2016 de DTT gemaakt. Deze grote belangstelling maakt duidelijk dat scholen verwachten dat diagnostisch toetsen een meerwaarde kan hebben voor leerlingen en docenten. Zowel bij het verkrijgen van inzicht in het leerproces van de leerling als in de ondersteuning van docenten om gerichter onderwijs te geven.

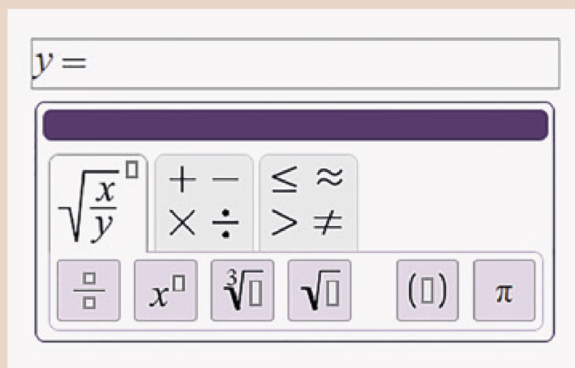
De diagnostisch tussentijdse toets
De DTT is een digitale, methodeonafhankelijke, diagnostische toets voor leerlingen aan het einde van de onderbouw die op vijf niveaus kan worden afgenomen (leerjaar 2 van vmbo-BB, KB, GT, en leerjaar 3 van havo en vwo). Bij de DTT staat het leerproces voorop. De DTT is dus niet bedoeld om leerlingen te selecteren, plaatsen of certificeren. Het is een extra hulpmiddel voor docenten en leerlingen dat inzicht geeft in de kansen en aandachtspunten van een leerling aan het eind van de onderbouw. Leerlingen krijgen dan ook geen cijfer maar een diagnose. Deze diagnose zoomt in op specifieke vaardigheden en biedt inzicht in de leerbehoeftes. Op grond van de diagnose kunnen leraren zien bij welke leerlingen er extra aandacht aan bepaalde aspecten moet worden besteed, maar ook of een leerling misschien op aspecten onder zijn of haar niveau zit. Daarmee kunnen docenten meer onderwijs op maat bieden en het onderwijsleerproces bijsturen. SLO ontwikkelt een handreiking om docenten te helpen hier vorm aan te geven in hun lessen en in hun onderwijsaanpak.

Kader 1
Het College voor Toetsen en Examens voert in opdracht van OCW de pilot Diagnostische Tussentijdse Toets uit. Het CvTE werkt hiervoor samen met Stichting Cito, Stichting Leerplanontwikkeling (SLO), DUO, de universiteiten van Twente, Utrecht en Maastricht en met het onderwijsveld. Daarnaast bieden de VO-raad en de vereniging van onderwijsadviesbureaus EDventure ondersteuning aan het CvTE.

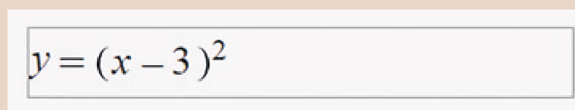
DTT wiskunde
Voor het vak wiskunde is de DTT opgebouwd aan de hand van de wiskundige domeinen: *Getallen (en variabelen)*, *Verhoudingen*, *Meten en meetkunde* en *Verbanden en formules*, en voor havo/vwo ook het domein *Informatieverwerking en onzekerheid*. Het idee van de toets is dat leerlingen voor het eerst een groter stuk curriculum overzien (1,5 à 2,5 jaar). De DTT wiskunde wil in beeld brengen wat voor wiskundebagage leerlingen uit de onderbouw meenemen naar de bovenbouw. Dan gaat het niet zozeer om definities en details als wel over *big ideas*, wiskundige concepten die een rol spelen in de doorlopende leerlijn. De DTT is niet bedoeld als 'superproefwerk', maar focust op onderliggende wiskundige vaardigheden. In de constructie van de opgaven is gezocht naar vormen die hierbij passen, naar vragen en vraagtypen die op een vernieuwende manier bevragen. Een voorbeeld hiervan is om niet naar het resultaat van een berekening te vragen, maar leerlingen te vragen hoe het gevraagde zou kunnen worden opgelost door ze uit meerdere berekeningen te laten kiezen. Ook een voorbeeld is het gebruik van classificeervragen: leerlingen vragen om lineaire verbanden te classificeren in stijgend, constant of dalend; of kwadratische uitdrukkingen te laten sorteren in bevat wel of niet een factor $x - 2$ in de ontbinding. Een andere vorm is het gebruik van opgaven waarin van leerlingen wordt gevraagd om te gaan met een zekere keuzevrijheid in het antwoord. Een voorbeeld hiervan is leerlingen vragen naar de vergelijking van een parabool die (3, 2) als top heeft. Hiervoor zijn oneindig veel verschillende antwoorden juist. Dergelijke opgaven vereisen wel een wiskundig intelligente manier van beoordelen. Kader 2

Kader 2

Als voorbeeld nemen we de volgende opgave: Geef een vergelijking van een parabool die als top het punt (3,2) heeft.
Om hierop antwoord te kunnen geven, moet de leerling een formule kunnen invoeren. Daartoe heeft hij een formule-editor, waarin $y =$ al klaarstaat. Afhankelijk van het schooltype kan deze editor in een eenvoudiger vorm worden klaargezet.



Vervolgens gaat de leerling een antwoord invoeren, bijvoorbeeld:



Er zijn echter nog oneindig veel andere goede antwoorden mogelijk, bijvoorbeeld $y = x^2 - 6x + 11$ of $y = -10(x - 3)^2 + 2$. Doordat de respons van de leerling door een computeralgebra systeem wordt beoordeeld, worden daadwerkelijk alle correcte antwoorden herkend en beloond (en alle andere als incorrect beoordeeld).

geeft aan op welke manier dat wordt gerealiseerd. In kader 3 staat bij wijze van illustratie nog een voorbeeldopgave.

De DTT wiskunde rapporteert op de domeinen uit de tussendoelen van SLO. Daarnaast beoogt de DTT grip te krijgen op de vraag waarom leerlingen bepaalde onderdelen niet beheersen. Dit is een ambitieuze doelstelling waarvan nog onderzocht wordt of die ook behaald gaat worden. Het waarom wordt nu gezocht in drie wiskundige kenmerken. Deze zijn gericht op het zien van onderliggende wiskundige structuren en patronen, het zien van relaties tussen verschillende onderdelen van wiskundige structuren, en de vaardigheid om te kunnen abstraheren/delen als een geheel te kunnen zien. Tijdens de pilot met de DTT worden de bruikbaarheid en de validiteit van de wiskundige kenmerken onderzocht.

De diagnose van de DTT wiskunde is dus een diagnose van de beheersing van de vakinhoudelijke domeinen en daarnaast van mogelijke verklaringen. De rapportage van de DTT beschrijft op welke aspecten een leerling op, onder of boven het verwachte niveau presteert. De DTT geeft géén informatie over andere mogelijke invloeden op de gestelde diagnose, zoals leerling- en omgevingskenmerken.

Om de diagnoses binnen de beschikbare afnametijd betrouwbaar en accuraat te kunnen stellen, heeft de toets een adaptief karakter. Dit houdt in dat de toets, afhankelijk van de antwoorden van de betreffende leerling, doorvraagt op de punten waar dat nodig is. Tijdens het maken van de toets wordt direct nagegaan wat bekend is over de leerling op grond van zijn/haar antwoorden. Op basis daarvan wordt bepaald welke opgaven nog moeten worden voorgelegd om tot een betrouwbare diagnose te komen. Als de diagnose van een leerling op een bepaald aspect duidelijk is, wordt in vervolgopgaven niet meer op dat aspect doorgevraagd, maar volgen er opgaven uit een ander domein of opgaven die een ander kenmerk binnen een bepaald domein testen. Dit levert een op maat gemaakte en betrouwbare diagnose op die aan het licht brengt in hoeverre de leerling de diverse domeinen beheerst.

Belangrijke rol voor docenten en scholen

Aan de ontwikkeling en het testen van de DTT wiskunde werkt een groot team van inhoudelijke experts intensief samen met scholen en docenten. De opgaven worden door Stichting Cito gemaakt in samenwerking met constructiegroepen die bestaan uit docenten. Vervolgens maken leerlingen van een aantal pilotscholen de opgaven, waarna de uitkomsten worden geanalyseerd per opgave. Hierbij wordt onder andere bekeken hoe moeilijk elke opgave is. Docenten adviseren op grond van hun ervaring, met het oog op de tussendoelen en met gebruik van de testdata, over de standaard: wanneer zit een leerling op, onder of boven niveau? Voor de opgaven daadwerkelijk worden opgenomen in de DTT wiskunde, worden ze tevens uitgebreid beoordeeld en getoetst door de leden van de vaststellingscommissie van het CvTE. Hierin zitten vier docenten wiskunde, zowel vanuit het vmbo als vanuit havo/vwo. Zij rekenen de opgaven na en nemen ze een voor een door aan de hand van een aantal aspecten: is de opgave eenduidig, klopt hij wiskundig, past de opgave bij het niveau waarvoor hij is ontwikkeld, zit de opgave taalkundig goed in elkaar, et cetera. De leden proberen met de ogen van de leerlingen naar de opgaven te kijken: hoe zouden leerlingen deze opgave lezen, hoe zouden ze antwoorden en kan de opgave ook nog anders worden uitgelegd? Pas na een positief oordeel van de vaststellingscommissie kan een opgave door naar de volgende ronde: opname in de DTT. Tijdens de pilot DTT wordt er bovendien nauw contact onderhouden over de ontwikke-

Kader 3
Een voorbeeldopgave:

De sportclubs Heiwoude en Haashoef worden samengevoegd.
Van beide sportclubs is bekend hoe het aantal leden zich de komende jaren gaat ontwikkelen:

sportclub	aantal leden
Heiwoude	$620 - 10t$
Haashoef	$740 + 30t$

Hierbij is t de tijd in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2015.

Er wordt een feest gegeven als het aantal leden van de nieuwe club 2000 is.

Welke vergelijking moet je oplossen om uit te kunnen rekenen in welk jaar dat is?

In welk jaar wordt dat feest gegeven?

Elke vergelijking die equivalent is met de vergelijking $620 - 10t + 740 + 30t = 2000$ wordt goedgekeurd. Vervolgens krijgt de leerling een score voor het oplossen van de ingevoerde vergelijking, zelfs als die niet correct is. Er is dus sprake van afhankelijke beoordeling: als een verkeerd opgestelde vergelijking toch correct wordt opgelost, is een deelscore mogelijk.

ling van de DTT met de deelnemende scholen, via informatie- en themabijeenkomsten en een klankbordgroep. De DTT is dus letterlijk werk in uitvoering.

Eerste pilotjaar en verder

De *pretest* die in het schooljaar 2014-2015 is afgenomen, was vooral bedoeld om de kwaliteit en eigenschappen van de opgaven na te gaan en om te achterhalen of de DTT technisch werkt zoals beoogd. Er werd een rapportage op schoolniveau gegeven. Uit de resultaten is gebleken dat de opgaven moeilijker waren voor de leerlingen dan werd verwacht. Mogelijke verklaringen zijn onder meer dat alle stof uit de onderbouw in de opgaven is verwerkt, terwijl die stof soms al een langere tijd geleden is behandeld in de klas. Ook de tijdsduur van de toets, zo'n 2,5 uur, speelt mogelijk een rol, zeker voor leerlingen van vmbo-BB en vmbo-KB. Daarnaast is de DTT nog onbekend en voor leerlingen is het belang ervan misschien nog niet voldoende duidelijk. Op grond van de analyses naar aanleiding van de resultaten van de *pretest* heeft Stichting Cito nieuwe opgaven voor de volgende pilot ontwikkeld die ook weer door de vaststellingscommissie zijn beoordeeld en getoetst. Tijdens de eerste adaptieve DTT-afname van afgelopen februari heeft elke leerling een diagnose ontvangen van twee domeinen en de drie bijbehorende wiskundige kenmerken. Naar verwachting zal er in februari 2017 een goed werkend prototype zijn dat op individueel niveau een diagnose voor de onderzochte domeinen en kenmerken oplevert.

De DTT-diagnose biedt inzicht in het leerproces van leerlingen. Hierdoor kunnen leerlingen samen met de docent op maat ontdekken waar extra begeleiding nodig is en waar juist kansen liggen om (nog) beter wiskunde te bedrijven. Wereldwijd wordt inmiddels het belang van het geven van feedback erkend om leerlingen beter te laten leren. Nederland loopt hierin voorop. Diagnostisch toetsen en feedback geven zijn dan ook sterk in opkomst in het onderwijs.

Over de auteurs

Els Boonstra (voorzitter), Rosalie Welsink-Zoller, Wim Lammers, Esther Stok en Marjanne Klom (leden) vormen de vaststellingscommisie van de DTT. Dit artikel kwanm tot stand in samenwerking met het CvTE, onder redactie van Pascalle Haenen. E-mailadres: *p.haenen@hetcvte.nl*. Zie ook: *www.pilotdtt.nl*

adv Moravia

MEDEDELING

ONDERWIJS *MEETS* ONDERZOEK
WAT KUNNEN WISKUNDEONDERWIJS EN ONDERWIJSONDERZOEK VOOR ELKAAR BETEKENEN?

De praktijk van het wiskundeonderwijs in de klas en die van de onderwijsonderzoeker, dat zijn vaak gescheiden werelden. Wat betekent wiskundedidactisch onderzoek voor de praktijk van het wiskundeonderwijs, en hoe kunnen vragen uit de praktijk richting geven aan het onderzoek? Deze vragen staan centraal tijdens de conferentie die de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en SLO op maandag 20 juni in Utrecht organiseren.
Dat dit een actuele vraag is, blijkt bijvoorbeeld uit de oprichting van het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek in 2012, dat zich richt op de verbinding tussen praktijk en onderzoek, en uit de initiatieven van OCW om docenten te faciliteren voor het uitvoeren van didactisch onderzoek (DuDOC, postdoc VO). Het doel van deze dag is dan ook om de dialoog tussen de twee werelden verder te stimuleren door docenten te informeren over onderzoek en onderzoekers te informeren over vragen uit het veld. De doelgroep bestaat uit wiskundedocenten uit de volle breedte van het vo en onderwijsonderzoekers gericht op de didactiek van de wiskunde.

Op het programma staat allereerst de presentatie van twee nationale perspectieven, verbeeld door dr. Alison Clark-Wilson (Engeland) en prof. dr. Paul Drijvers (Nederland). Daarnaast kent de conferentie posterpresentaties van actieve onderzoekers in wiskundeonderwijs en werkgroepen over onder andere methoden in onderzoek van wiskundeonderwijs. Zo werken we toe naar een afsluitende paneldiscussie over de hoofdvraag. Voor wiskundedocenten wordt zo duidelijker welke wetenschappelijke kennis over wiskundeonderwijs zij in hun praktijk kunnen benutten. Onderzoekers van wiskundeonderwijs krijgen een beter beeld van de problemen in de praktijk van het wiskundeonderwijs die om een onderzoeksmatige oplossing vragen.

Deelnemers aan de conferentie mogen zelf een probleem formuleren in het wiskundeonderwijs waarvoor onderzoek gewenst lijkt: welk onderzoek zou jij nou zélf in het wiskundeonderwijs willen (laten) verrichten?

Plaats: vergadercentrum Domstad, Utrecht
Datum: 20 juni 2016
Tijd: 14:30 uur - 19:00 uur
Deelnamekosten: €50,00
Deelnemers ontvangen na de conferentie een certificaat dat naar verwachting door Registerleraar wordt geaccrediteerd.
Voor nadere informatie: Heleen van der Ree, E-mailadres: *hoofdbureau@nvvw.nl*. Aanmelding: via *www.nvvw.nl*.

Conceptprogramma

14:30 – 15:00 uur	Ontvangst
15:00 – 15:15 uur	Opening door Jelle Kaldewaij, directeur NRO
15:15 – 16:00 uur	Duopresentatie Alison Clark-Wilson (London Knowledge Lab) en Paul Drijvers (Freudenthal Instituut)
16:00 – 16:45 uur	Posterpresentaties van onderzoekers in wiskundeonderwijs
16:45 – 17:30 uur	Drie parallelsessies
17:30 – 18:15 uur	Lichte maaltijd.
18:15 – 19:00 uur	Ronde tafel met input van trendwatchers bij de posterpresentaties
19:00 uur	Sluiting van de conferentie.

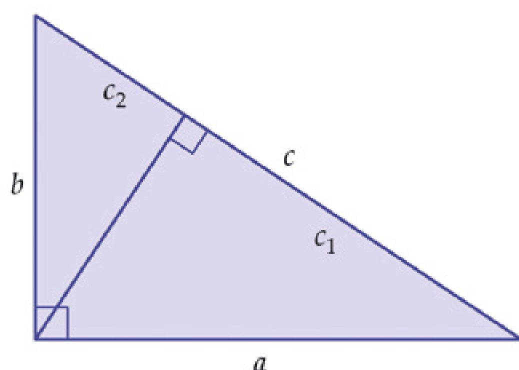
PYTHAGORAS MET COSINUSSEN

Jan van de Craats

Zonder twijfel is de stelling van Pythagoras de bekendste stelling uit de meetkunde. Velen zullen zich zonder moeite de magische formule $a^2 + b^2 = c^2$ herinneren. Misschien weten ze ook nog dat het gaat over rechthoekige driehoeken met rechthoekszijden van lengte *a* en *b* en een hypotenusa (schuine zijde) van lengte *c*.

Twee mooie bewijzen

Het aantal bewijzen van de stelling is legio. Een van de eenvoudigste maakt gebruik van de hoogtelijn op de hypotenusa. zie figuur 1. Die verdeelt de driehoek in twee kleinere driehoeken, die beide gelijkvormig zijn met de oorspronkelijke driehoek. Daaruit volgt enerzijds dat $c_1/a = a/c$, dus $a^2 = c_1c$, en anderzijds dat $c_2/b = b/c$, dus $b^2 = c_2c$. Optellen geeft $a^2 + b^2 = (c_1 + c_2)c = c^2$, klaar.



figuur 1 De hoogtelijn op de hypotenusa

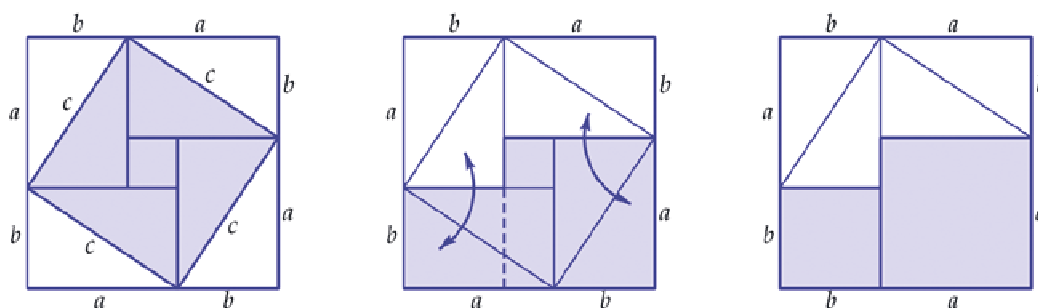
Bij dit bewijs spelen vierkanten geen rol. Dat is anders bij de meeste *legpuzzelbewijzen*, waarbij wordt aangetoond dat een vierkant met zijde *c* opgeknipt kan worden in twee vierkanten met zijden *a* en *b*. Mijn favoriete legpuzzelbewijs staat in figuur 2. Het is een bewijs zonder woorden: kijken naar de opeenvolging van plaatjes volstaat. Bovendien kun je er ook nog illustraties in zien van de volgende algebraïsche identiteiten (voor positieve *a* en *b*): $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ en $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Rechthoekige boldriehoeken

Wanneer een bewijs van de stelling van Pythagoras ter sprake komt, kan ik het meestal niet laten om te vragen wat er daarbij mis gaat als je het toepast op het boloppervlak. Daarop heb je immers ook driehoeken, gevormd door bogen van grote cirkels, en die kunnen elkaar ook onder een rechte hoek snijden. Er bestaan dus ook rechthoekige driehoeken op de bol, maar de stelling van Pythagoras in de bekende vorm $a^2 + b^2 = c^2$ geldt zeker niet. Neem maar het bijzondere geval van een boldriehoek die een volledig octant beslaat: die heeft drie zijden van gelijke lengte (en drie rechte hoeken). Wat er in het bovengenoemde hoogtelijnbewijs misgaat, is dat de hoogtelijn op de hypotenusa een rechthoekige boldriehoek *niet* in twee deeldriehoeken verdeelt die met de oorspronkelijke driehoek gelijkvormig zijn. En de legpuzzelbewijzen lopen allemaal spaak omdat je op de bol geen vierkanten hebt: er bestaan daar überhaupt geen vierhoeken met vier rechte hoeken.

Toch geldt er wel degelijk een soort stelling van Pythagoras op de bol, en die heeft een verrassend eenvoudige vorm, namelijk $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$ waarbij de betekenis van de hoeken α, β en γ uit figuur 3 kan worden afgelezen. Driehoek *ABC* is een rechthoekige driehoek op de bol met een rechte hoek in *C*. De straal van de bol heb ik *r* genoemd, en de zijden van de driehoek zijn bogen van grote cirkels die vanuit het middelpunt van de bol gezien, hoeken α, β en γ opspannen.

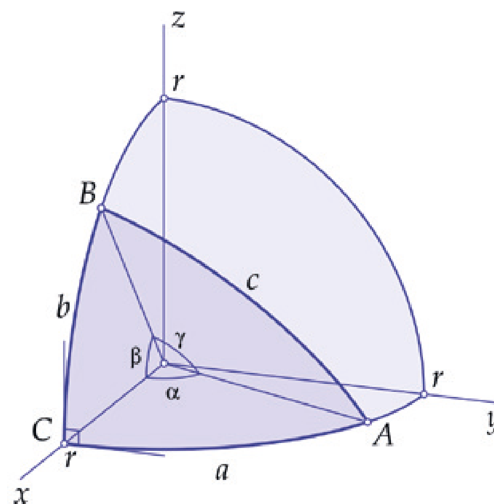
Als die hoeken in radialen worden gemeten, hebben de cirkelbogen (de zijden van de driehoek) lengte $a = \alpha r$, $b = \beta r$ en $c = \gamma r$ dus in termen van de zijdelengten kan de stelling van Pythagoras op de bol ook geformuleerd worden als $\cos(c/r) = \cos(a/r)\cos(b/r)$



figuur 2
Een legpuzzelbewijs

Vectoren en inproduct

Een bewijs van de stelling van Pythagoras op de bol gaat het gemakkelijkst met behulp van vectoren en het inwendig product (inproduct). Het inproduct van twee vectoren **p** en **q** kan meetkundig worden gedefinieerd als (**p**,**q**) = | **p** | | **q** |cosφ waarin φ de hoek is tussen **p** en **q**. Het is niet moeilijk om aan te tonen dat het inproduct, uitgedrukt in coördinaten ten opzichte van een orthonormale basis, gelijk is aan $(\mathbf{p},\mathbf{q}) = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$.
Zie nu weer figuur 3. Neem daarin het middelpunt van de bol als de oorsprong O, leg de positieve *x*-as door *C*, en kies de punten *A* en *B* respectievelijk in het *xy*-vlak en het *xz*-vlak. Dan geldt $A = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0)$, $B = (r\cos\beta, 0, r\sin\beta)$ en $C = (r,0,0)$. De beide vectoren *OA* en *OB* hebben lengte *r* en hun ingesloten hoek is γ. Hun inproduct is dus gelijk aan $r^2\cos\gamma$. Maar in coördinaten uitgedrukt is hun inproduct gelijk aan $r^2\cos\alpha\cdot\cos\beta$. Gelijkstellen van de beide uitdrukkingen en delen door r^2 voltooit het bewijs.
Het is leerzaam om zelf bijzondere gevallen te bekijken. Klopt de stelling bijvoorbeeld als $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$? Hoe zit het als de rechthoekige boldriehoek *ABC* gelijkbenig is, dus als $a = b$ of als $a = c$? En kunnen die cosinussen ook negatief worden? Wat is er dan aan de hand?



figuur 3 Pythagoras op de bol: $\cos\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta$

Kleine driehoeken

Als de afmetingen van een rechthoekige boldriehoek klein zijn ten opzichte van de straal *r* van de bol, is de boldriehoek vrijwel vlak, dus dan zal praktisch gesproken de gewone stelling van Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ gelden. Dit kun je afleiden uit de formule $\cos(c/r) = \cos(a/r)\cos(b/r)$ als je bij gelijk blijvende *a* en *b* de straal *r* naar oneindig stuurt.
Noem hiertoe $t = 1/r$ want het nemen van een limiet is makkelijker als de variabele naar 0 gaat. Herschrijf de stelling nu met behulp van de dubbelehoekformule $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ tot $1 - 2\sin^2(ct/2) = (1 - 2\sin^2(at/2))(1 - 2\sin^2(bt/2))$.
Haakjes uitwerken en vereenvoudigen geeft:
$\sin^2(ct/2) = \sin^2(at/2) + \sin^2(bt/2) - 2\sin^2(at/2)\sin^2(bt/2)$.
Nu zie je al wat er gebeurt als je *t* naar 0 stuurt: de derde term in het rechter lid gaat veel sneller naar 0 dan de eerste twee, en in de andere termen zie je de gewone stelling van Pythagoras al opdoemen. Slim herschrijven neemt elke twijfel weg:

$$c^2\left(\frac{\sin(ct/2)}{ct/2}\right)^2 = a^2\left(\frac{\sin(at/2)}{at/2}\right)^2 + b^2\left(\frac{\sin(bt/2)}{bt/2}\right)^2 - 2\sin^2(at/2)b^2\left(\frac{\sin(bt/2)}{bt/2}\right)^2$$

en als *t* naar 0 gaat (dus *r* naar oneindig) levert de standaardlimiet $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ inderdaad de vlakke stelling van Pythagoras op.

Over de auteur

Jan van de Craats is emeritus hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. E-mailadres: *janvandecraats@casema.nl* Homepage: *https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/*

GETUIGEN

ZEVEN VRIJE KUNSTEN

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



De zeven vrije kunsten waren gedurende de middeleeuwen en de vroegmoderne tijd de vakken waar ieder welopgevoed mens kennis van had genomen. In feite definieerde kennis van de vrije kunsten je als persoon. Ze hoorden bij de kennis van vrij man, die zich daarmee onderscheidde van het gewone gepeupel. Het was geen toeval dat er juist zeven vrije kunsten waren. Er waren ook zeven sacramenten, zeven hemellichamen (maan, zon, en de vijf bekende planeten Mars, Venus, Jupiter, Saturnus en Mercurius), zeven kardinale deugden, zeven dagen in de week. Zeven was een getal dat alleen al vanwege de religieuze connotatie goed lag.



figuur 1 Cornelis Cort, Geometria, gravure uit de serie Zeven Vrije Kunsten (1565)

De vrije kunsten waren ingedeeld in het trivium en het quadrivium. Het trivium waren de taalvakken: grammatica, retorica en dialectica. Wiskunde viel onder het quadrivium en bestond uit een aantal vakken die vandaag de dag niet meer allemaal bij de wiskunde horen: de rekenkunde, de meetkunde, de astronomie en de muziek. Omdat het deel uitmaakte van menselijke kennis over de Schepping stond kennis van de vakken van het quadrivium in hoog aanzien. In de late middeleeuwen en vroegmoderne tijd werden ‘dagelijkse’ situaties en taferelen een populair onderwerp in de kunst. Vaak werden schilderijen en beeldhouwwerken gebruikt om als les te dienen voor de toeschouwers. Veelal ging het over godsdienstige taferelen of waren beelden bedoeld ter opluistering van een persoon, maar er werden ook allegorische afbeeldingen gemaakt over de zeven vrije kunsten. Die voorstellingen geven ons vandaag informatie over de reden waarom wiskunde werd onderwezen en wat men daar voor doel in zag. Met name in de zestiende eeuw waren er veel mensen die geld hadden voor kunst, en zodoende werden er in die periode vele beeldhouwwerken, schilderijen en gravures geproduceerd – en daaronder waren er een aanzienlijk aantal over de vrije kunsten.

De Hollandse graveur en tekenaar Cornelis Cort (1533-1578) maakte een serie van zeven allegorische afbeeldingen over de vrije kunsten in 1565. Hij genoot vooral bekendheid vanwege grote hoeveelheden gravures met Bijbeltaferelen en klassieke mythologie als onderwerp. Zijn gravures waren altijd zeer detailrijk en werden



figuur 2 Cornelis Cort, Astronomia, gravure uit de serie Zeven Vrije Kunsten (1565)

in groot formaat gedrukt. De wiskundige vakken werden in zijn voorstellingen gerepresenteerd door vrouwen, die omringd werden door allerlei zaken die met het afgebeelde vakgebied werden geassocieerd.

Zo waren in de allegorie van de meetkunde een passer, een hoekmeetinstrument en een liniaal zichtbaar. De globe verwees naar het doel van de meetkunde: het ging om het meten, leren kennen of begrijpen van de wereld. Omdat het om de Schepping ging, was dat een belangrijk doel. Als meer wereldse toepassing van meetkunde waren er daarnaast torens zichtbaar op het hoofd van de dame. Die verwezen naar architectuur in het algemeen en verdedigingswerken in het bijzonder: een belangrijk zestiende-eeuws wiskundig expertisegebied. Dat kennis van de meetkunde ook gevaar voor het zielenheil in zich hield werd door de graveur verbeeld in de aanwezigheid van een slang. Het was bekend en gewaardeerd dat wiskunde een uiterst strenge vorm van redenering nastreefde. Thomas van Aquino (1225-1274) had meetkundige



figuur 3 Cornelis Cort, Musica, gravure uit de serie Zeven Vrije Kunsten (1565)

bewijzen zelfs beschreven als net een beetje minder betrouwbaar dan de Openbaring. Het gevaar school in mensen die de wiskundige bewijsstructuur zouden gaan gebruiken om alles logisch te willen verklaren, en dat werd beschouwd als de weg naar ongeloof of valse profetieën.

In de afbeelding van de astronomie was ruimte ingericht voor een zonnewijzer en voor astrologische voorspellingen. Opvallend was dat de muziek vrijwel los stond van wiskundige toespelingen die erin hadden kunnen zitten. De antieke muziekleer koppelde verhoudingen van getallen aan noten. Die koppeling werd hier niet gelegd, hetgeen er wellicht op duidde dat de muziek zich loszong van de andere wiskundige disciplines en alleen nog uit gewoonte onder de wiskundige vakken werd gerekend.
In de allegorische voorstelling van de rekenkunde lagen muntjes en koopwaren, die verwezen naar de koophandel – en naar de gewoonte om met munten te rekenen. Daarnaast lagen er op deze afbeelding ook boeken met daarop de namen van Abraham en Pythagoras. Die eerste naam refereerde aan de Bijbelse Abraham, de aartsvader, die zijn kennis –onder andere van de rekenkunde– direct van God zou hebben gekregen. Met de verwijzing naar Abraham werd het accent gelegd op de waardering voor oude kennis: hoe ouder, hoe meer vertrouwenwekkend. Nieuwe kennis was per definitie suspect. Een alternatief voor oude kennis was een openbaring. Die was aanwezig in de de verschillende allegorieën in de vorm van engelen.



figuur 4 Maerten de Vos, Allegorie op de Zeven Vrije Kunsten (1590)

De Antwerpse kunstschilder Maerten de Vos (1532-1603) produceerde eind zestiende eeuw eveneens een allegorie op de zeven vrije kunsten in alle uitbundige kleuren zoals dat indertijd gewaardeerd werd. In zijn schilderij ziet men dezelfde elementen terugkomen als in de gravures van Cort. Ook hier de meetinstrumenten en de zonnewijzer, naast de obligate slangen.

Vroegmoderne allegorieën over de vrije kunsten illustreren dat wiskunde, inclusief de astronomie en ook de muziek, vooral gezien werd als een manier om de Schepping te kunnen duiden en te verheerlijken. Dat maakte wiskunde ook belangrijker dan de vakken van het trivium, die 'enkel' dienden om met elkaar van gedachten te kunnen wisselen. Wiskunde werd gewaardeerd om de praktische waarde die het vak had. Dat varieerde van koopmansrekenen tot vestingbouw. De praktische kennis school echter ook in de hulp die wiskunde bood in het leren begrijpen van de Schepping zoals die zich aan ons voordeed. De Goddelijke oorsprong van wiskunde werd ook benadrukt, evenals het gevaar dat er in wiskunde school wanneer men teveel op redeneringen ging vertrouwen.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

HET FIZIER GERICHT OP...

HOEZO FORMATIEF TOETSEN?

Mieke Abels
Marja van den Heuvel-Panhuizen
Ilona Friso van den Bos

In FIzier belichten medewerkers van het Freudenthal Instituut een thema uit hun werk en slaan hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering schrijven Mieke Abels, Marja van den Heuvel-Panhuizen en Ilona Friso van de Bos over hoe de Digitale Toets Omgeving (DTO) ingezet kan worden als een hulpmiddel bij formatief toetsen. De DTO, die ingebed is binnen de DWO (Digitale Wiskunde Omgeving), is door de Universiteit Utrecht ontwikkeld in het kader van het *FaSMEd* project.[1]



Formatief toetsen

Er zullen docenten zijn die niet weten wat formatief toetsen is, maar het wel dagelijks doen: het stellen van vragen, het observeren van leerlingen als ze alleen of in een groepje aan het werk zijn, het laten maken van een serie zelf bedachte opgaven, het bekijken van leerlingenwerk en leerstrategieën, het geven van een toets. Wanneer de op deze manier verkregen informatie gebruikt wordt om aanwijzingen te vinden voor de verdere instructie en/of

voor het nemen van didactische beslissingen, is er sprake van formatief toetsen. Het toetsen moet men wel ruim zien, dus meer in de zin van evalueren.

DTO

De Digitale Toets Omgeving beperkt zich niet tot het geven van een totaalscore per toets. De docent kan snel een overzicht van de hele klas op het scherm krijgen met alle gegeven antwoorden. Het bijzondere van de DTO is dat niet alleen zichtbaar wordt welke antwoorden de leerlingen hebben gegeven, maar ook welk hulpgereedschap ze gebruikt hebben om de opgaven op te lossen. De beschikbare (digitale) hulpgereedschappen kunnen zijn: een leeg kladblaadje, een kladblaadje met een rooster, een hint, een strook, een getallenlijn en een tabel. Deze zijn allemaal aanwezig binnen de DTO.

4	4.1	4.2	4.3	4.4		5	5.1	5.2	5.3	5.4		6	6.1	6.2	6.3	6.4
antw.4	Kll	Klr	Str	Tab		antw.5	Kll	Klr	Str	Tab		antw.6	Kll	Klr	Str	Tab
20				Ja		30				Ja		150				
30						32						150				
20						40						150				
30			Ja			32						800				
27				Ja		33				Ja		150				
30				Ja		32				Ja		160				Ja
21		Ja		Ja		30		Ja		Ja		250				Ja
30	Ja					32						150				
35				Ja		30						150				
30	Ja			Ja		32				Ja		150				
30						32		Ja				150				
30				Ja		45	Ja					160				
30	Ja	Ja				30		Ja				1000		Ja	Ja	Ja
30				Ja		32						160	Ja			Ja
30	Ja					30						160	Ja			
30				Ja		32						150				
30		Ja				46	Ja	Ja	Ja			150		Ja		
30				Ja		30						50				
30		Ja				32		Ja				160		Ja	Ja	
30				Ja		32			Ja	Ja		150			Ja	
30						32						150				
30	Ja					30	Ja					150	Ja			

figuur 1

Het analyseren van resultaten

In figuur 1 ziet u een deel van zo'n klassenoverzicht van een toets over procenten, die uit zes opdrachten bestond. Deze toets is gemaakt door leerlingen uit groep 8. Kunt u snel conclusies trekken zonder de opgaven gezien te hebben?

Opgave 6 was:
Een school heeft dit jaar 200 leerlingen.
Dat is 25% meer dan vorig jaar.
Hoeveel leerlingen waren er vorig jaar?

Ziet u het probleem? Deze leerlingen hadden nauwelijks gewerkt met percentages boven de 100. Dit bleek dan ook erg moeilijk, al waren er ook leerlingen die de

Opgave 5

In 24 minuten is de batterij voor 75% opgeladen.
Wat zal de totale oplaadtijd zijn?
Antwoord: 30 × minuten

kladblaadje leeg
kladblaadje rooster
strook
tabel

min	24	...	...	30	...	...	...	...
pro%	75%	...	...	100%	...	...	...	...

figuur 2

opgave goed hadden opgelost. Op basis van deze gegevens kan een docent beslissingen nemen over vervolglessen: zou een strook een model kunnen zijn dat de structuur van de opdracht duidelijk maakt? Of gaan sommige leerlingen liever aan de slag met een tabel? Bij opgave 5, zie figuur 2, kwam een aantal keer 30 als fout antwoord voor. Hoe is deze leerling aan die 30 gekomen?
Zou deze leerling zelf kunnen ontdekken waar het mis gegaan is? Heeft deze leerling een vierde deel van 24 er bij opgeteld? Welke stappen hebben leerlingen genomen die ook 30 als antwoord hebben gegeven? Deze voorbeelden laten zien welke hulp deze leerlingen zouden kunnen gebruiken om dit onderwerp beter te leren beheersen.

Ten slotte

Wat onze bedoeling is met de DTO, is docenten een rijker beeld geven van het leren van hun leerlingen en didactische middelen aanreiken waarmee dit leren ondersteund kan worden. De herontdekking van de kracht van het kladblaadje, dat door een van de docenten naar aanleiding van het werken met de DTO duidelijk werd verwoord, is daar een voorbeeld van. De constatering dat in sommige klassen de tabel niet werd gebruikt, en dat de strook geen vertrouwd model was, leidde tot interessante discussies tijdens de docentenbijeenkomsten. In deze zin liet ons onderzoek zien dat we met de DTO een gereedschap aan het maken zijn dat docenten handvatten geeft om efficiënt didactische beslissingen te kunnen nemen.

Noot

[1] *FaSMEd* staat voor: *Formative Assessment in Science and Mathematics Education.*

Over de hoofdauteur

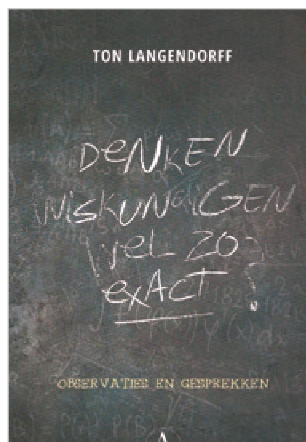
Mieke Abels is docent wiskunde geweest in het vo. Thans is ze betrokken bij ontwikkel- en onderzoeksprojecten voor rekenen/wiskunde in het po en vo.
Emailadres: *M.J. Abels @uu.n*

BOEKBESPREKING

DENKEN WISKUNDIGEN WEL ZO EXACT?



Gerard van Heijningen



Ondertitel: Observaties en gesprekken
Auteur: Ton Langendorff
Uitgever: Uitgeverij Athenaeum, Amsterdam (2015)
ISBN: 978 90 253 0767 7 (288 pagina's; paperback)
ISBN: 978 90 253 0768 4 (*e-book*)
Prijs: € 17,50 (*e-book* € 11,99)

Een typisch geval van serendipiteit: een toevallige vondst waar je niet naar op zoek was. Of het zo heeft moeten zijn, dat je net die ontmoeting hebt met de persoon die later je vaste partner blijkt te worden. Of die film, die zijn première beleeft en zijn oorsprong vindt in het boek dat je net aan het lezen bent. Of het lied, dat je in je hoofd hebt en precies op dat moment op de radio uitgezonden wordt. Toeval of niet, ik denk dat we allemaal weleens zo'n ervaring hebben. Zo was ik bezig met het schrijven van een eerste opzet van mijn onderzoeksdossier - het onderzoek gaat over wiskundige denkactiviteiten bij mijn tweedejaarsleerlingen – toen mijn oog viel op een korte aankondiging in de boekenbijlage van de Volkskrant. De titel *Denken wiskundigen wel zo exact?* intrigeerde en mijn bestelling was nog vroeg genoeg om de volgende dag een exemplaar op de deurmat aan te mogen treffen. In enkele dagen las ik het boek van Ton Langendorff uit.
De auteur is afgestudeerd cultureel antropoloog – na een afgebroken studie Econometrie - maar heeft zijn werkterrein gevonden op het gebied van wetenschapsbeleid. Via het ministerie van OCW en een adviesraad werd hij beleidsmedewerker bij de TU Eindhoven. Langendorff is reeds gepensioneerd, maar nog steeds actief als manager van het *Applied Mathematics Institute* (*AMI*) van de drie technische universiteiten. Tijdens zijn contacten met enkele collega's wiskunde verbaasde hij zich erover, dat deze helemaal niet zo exact dachten als hij veronderstelde dat ze zouden doen. Hij besloot zich verder in dit fenomeen te verdiepen. De neerslag van observaties en gesprekken is vervat in dit boek.
Het prettig leesbare boek is gebaseerd op een aantal thema's. Per thema beschrijft Langendorff een situatie of gebeurtenis die hij gebruikt als kapstok voor zijn betoog. Elk thema wordt afgesloten met de geselecteerde weergave van interviews die hij, naar aanleiding van het thema, met twaalf hoogleraren Toegepaste Wiskunde, verbonden aan de drie technische universiteiten (Delft, Eindhoven en Twente), heeft gevoerd.
In het eerste deel neemt de auteur ons mee in de wereld van de schijnbare tegenstelling van ratio en gevoel. Hoe komen wiskundigen aan hun ideeën? Welke vervolgstappen nemen ze? Hoe ervaren ze successen? Welke rol speelt intuïtie? Hoort dromen bij wiskundig denken? Hoe wordt er omgegaan met tegenslagen? Langendorff leidt de lezer via de warrige wegen van knutselsessies, abstracties, *Aha! Erlebnissen* en analogieën richting redeneren en denken. Voor mijn onderzoek heb ik een vergelijk gezocht met mijn leerlingen. Denken leerlingen wel zo wiskundig als zij met ons beminde vak bezig zijn? Waar zijn de gedachten van de leerling die dromerig naar buiten staart als hij net uitleg heeft gekregen van formules van Simpson? Als een wiskundige de wereld in staart of zomaar eens een wandelingetje maakt, blijkt dat een goede manier te zijn om de gedachten te verzetten en de hersenen te activeren, een legitiem moment van bezinning, een grond voor inspiratie. Moeten we onze leerlingen, naast het aanleren en oefenen van vaardigheden, niet de kans geven te overdenken waar ze nu eigenlijk mee bezig zijn? Langendorff betrekt regelmatig het onderwijs in zijn observaties. Zo zegt hij: 'De ervaring van de ontdekking is in het onderwijs van belang, niet de vraag of er iets nieuws onder de zon is.' en 'Met andere woorden, de Aha!-ervaringen maakten dat de studenten het vak wiskunde leuk gingen vinden.'
Halverwege het boek is er een intermezzo getiteld *Over zuivere en toegepaste wiskunde*. Daarin breekt de auteur een lans voor het vak wiskunde. Het vooroordeel dat wiskunde oud en oubollig is verwerpt hij door te stellen dat er dagelijks vernieuwingen aan de wiskunde worden toegevoegd. Wiskunde die vaak zijn oorsprong vindt in dagelijkse praktische problemen. Als slechts een klein deel van alle wiskundige publicaties gebruikt wordt als toepassing voor maatschappelijke problemen zien per jaar duizenden innovaties het daglicht. Daartegenover vindt

de zuivere wiskunde haar inspiratie in zelf gecreëerde vragen.
Het tweede deel gaat over de communicatie die wiskundigen gebruiken om anderen te overtuigen van al hun ideeën, gedachten, stellingen en bewijzen. Het gaat hier over communicatie in de breedste zin van het woord. Schrijven, spreken, het gebruik van symbolen, bewegen, converseren en het maken van gebaren. Het is opvallend hoeveel wiskundigen bewegen – denk aan sporten, maar ook wandelen en dansen – om hun hersenen te activeren. Langendorff stelt dat wiskunde beweeglijk denken is. Gebaren zijn de aanvulling die formules begrijpelijk maken.
In het derde en laatste deel worden opvattingen besproken over schoonheid, grondslagen en het geloof. De schoonheid van de wiskunde die u en ik in de wiskunde zien is vaak een subjectief argument. Wat maakt een bewijs mooi of elegant? Wat is een lelijk bewijs? De auteur geeft drie criteria om schoonheid in een wiskundig bewijs te staven. Ten eerste noemt hij de gedachtegang die achter het bewijs zit. Deze moet helder zijn, zonder overbodige zaken en het bewijs moet zorgen voor begrip van het vraagstuk. Ten tweede moet een bewijs je in een oogopslag het mooie van de oplossing tonen. Als laatste moet een bewijs compact, beknopt en toch algemeen zijn, met een zekere reikwijdte.
In het hoofdstuk grondslagen gaat het over de drie 'scholen' die fundamentele opvattingen hebben over wat wiskunde nu precies is. Langendorff bespreekt de intuïtionisten, de platonisten en de formalisten.
In het laatste hoofdstuk wordt aandacht besteed aan het geloof. Het is opvallend dat het aantal gelovige wiskundigen relatief veel hoger is dan het aantal gelovige exacte wetenschappers. Dit is daarom zo opvallend, omdat wiskundigen alle facetten van het bestaan juist vanuit een rationeel referentiekader plegen te beschrijven. Dit zou toch een spanningsveld op moeten leveren. Vooral in de gesprekken die gevoerd zijn komt deze tegenstelling nadrukkelijk naar voren. Zo zegt een van de gesprekspartners: 'Volgens mij is het volstrekt onverenigbaar om gelovig te zijn en iets in de exacte wetenschappen te doen.'
Denken wiskundigen wel zo exact? is zó geschreven dat het ook toegankelijk is voor de niet-wiskundigen onder ons, al zullen die er niet zoveel zijn onder de lezers van *Euclides*. Het boek is een aanrader voor iedereen die op zoek is naar bevestiging van zijn eigen doen en laten in de wereld van de wiskunde. Het is geen boek met eenduidige antwoorden, maar werpt wel een licht op de wijze waarop wiskundigen de weg bewandelen van idee naar bewijs, met alle zijwegen, hobbels en obstakels. Wat vooral blijkt is, dat die weg er een is van creativiteit en hard werken, en verwant is aan de strijd die een kunstenaar levert bij het realiseren van zijn ideeën. Je krijgt niet alleen een indruk van de hersenspinsels van hedendaagse wiskundigen, maar Langendorff neemt de lezer regelmatig mee naar vervlogen tijden. Persoonlijk vind ik de geschiedenis van de Indiase Srinivasa Aaiyangar Ramanujan (1887–1920) een mooi voorbeeld, waarin G.H. Hardy (1877–1947) op pure intuïtie de jonge Indiër naar Engeland haalt, omdat hij een wiskundig talent in hem vermoedt. Er wordt gezegd dat dit misschien wel zijn belangrijkste bijdrage aan de wiskunde is geweest. En heb je het over intuïtie, dan is Henri Poincaré (1854–1912) een goed voorbeeld. Hij heeft zijn eigen denken grondig onder de loep genomen en was daar zeer openhartig over. Langendorff haalt Henri Poincaré aan met de volgende woorden: 'De logica, de enige die zekerheid kan geven, is het instrument voor het bewijs, de intuïtie is het instrument voor de uitvinding.'

In 1968 zong Aretha Franklin haar hit *Think* naar de zevende plaats van de Billboard Hot 100 in Amerika. In de film *The Blues Brothers* deed zij dat nog eens dunnetjes over. Hoewel de tekst (natuurlijk) over de liefde gaat, is het voor mij een soort van begintune geworden van een dag wiskundig denken. Noem het gevoel, intuïtie, sentiment. Exact, dat is het!

Think (Aretha Franklin)
You better think (think)
Think about what you're tryin' to do to me
Think (think-think) let your mind go
Let yourself be free

Over de auteur

Gerard van Heijningen is docent wiskunde aan de Isaac Beeckman Academie in Kapelle.
E-mailadres: *cactushome@casema.nl*

adv Texas

GECIJFERDHEID

Kees Hoogland

In deze interactieve rubriek belicht Kees Hoogland aspecten van gecijferdheid. Deze keer: Ontluikende gecijferdheid.





Vooraf

In onderwijskringen worden taal en rekenen of geletterdheid en gecijferdheid vaak in één adem genoemd. Toch verschilt de ontwikkeling van taal en van rekenen op essentiële punten van elkaar. Lezen en schrijven is bijvoorbeeld een specifiek coderingssysteem dat kinderen aangereikt krijgen zo tussen hun tweede en vierde levensjaar. Gecijferdheid echter lijkt haar oorsprong te kennen in rudimentaire hersenlagen en daarmee veel dieper verbonden te zijn met de natuurlijke ontwikkeling van kinderen. Zelfs de *nature-versus-nurture* discussie over gecijferdheid is nog niet beslecht. Veel diersoorten (b) lijken al enige vorm van gecijferdheid te hebben doordat ze inschattingen kunnen maken van groepsgroottes. Keith Devlin legt in zijn zeer leesbare boek *The Math Gene* meer de nadruk op de rol van gecijferdheid bij de overgang van primaat naar mens. Hij dicht de ontwikkeling van causaal denken, sterk verwant aan gecijferd denken, een belangrijke rol toe bij die overgang: het kunnen voorspellen van het effect van een actie, het als-dan denken.

0

Om een idee te krijgen van hoe aangeboren het gevoel voor aantallen is, laat ik in lezingen over gecijferdheid het publiek vaak raden op welke leeftijd een kind in staat is het onderscheid te maken tussen een, twee en drie. Let wel: het gaat dan niet om de *getallen* 1, 2 en 3, maar louter om het veel grondstoffelijkere fenomeen *aantallen*. De verbazing is groot dat het vermogen dit te kunnen onderscheiden al is aangetoond bij pasgeborene van enkele uren oud.

1 - 4

Tussen het eerste en vierde levensjaar gaan kinderen de wereld om hen heen verkennen. Ze komen daar spelenderwijs in aanraking met allerlei verschijningsvormen van aantallen, maar ook met verhoudingen, zowel getalsmatig als meetkundig. Verder raken ze vertrouwd met afmetingen en met meetkundige vormen van concrete objecten. Ook verkennen ze verbanden tussen grootheden en ervaren ze als-dan redeneringen. Als we ons dit realiseren, wekt het geen verbazing waarom er voor het referentiekader rekenen zo'n brede benadering is gekozen in vier domeinen: *getallen*, *verhoudingen*, *meten en meetkunde* en *verbanden*. Deze komen van nature voor in de wereld om ons heen.
Kinderen verkennen de gecijferde wereld door kijken, betasten, bewegen en spelen. Ze leggen de verbinding tussen objecten buiten henzelf en delen van hun lichaam, zoals tellen op de vingers. Het eigen lichaam is voor kinderen het eerste wiskundige model dat ze leren hanteren.

4 - 18

Tussen 4 en 18 jaar gaan kinderen naar school. Hun intuïtieve natuurlijke nieuwsgierige en waardenvrije ontdekking van de gecijferdheid in de wereld om hen heen komt tot een vrij abrupt einde. De wereld van het rekenen wordt van driedimensionaal en levensecht opeens tweedimensionaal, plat en los van de echte wereld: werkbladen, boekjes, beeldscherm, stil zitten achter een tafel, vooral niet bewegen, alles via het hoofd, liever niet met de handen. Soms snel toewerkend naar door anderen bedachte notaties en conventies. De ongedwongen waardenvrijheid van het verkennen van de gecijferde wereld verdwijnt naar de achtergrond. Er ontstaat een wereld van een antwoordgedreven goed-fout cultuur. Het is toch verwonderlijk dat we een vakgebied hebben waar kinderen voortdurend te horen krijgen wat ze fout doen. Claudio Alsina, de grote voorvechter van *less chalk, less words, less symbols, more objects, more context, more actions* in reken- en wiskundeonderwijs heeft dit al eens beeldend beschreven als *How Johnny became a flatlander*.[1]

19 - 88

In de volwassen wereld blijken heel veel mensen moeite te hebben met zelfs elementaire gecijferdheidsproblemen, zoals quizzen met incidentele rekensommen steeds weer laten zien in vele landen en culturen. Zo veel dat het ongeloofwaardig is dat het hier gaat om louter cognitieve hindernissen. Zo moeilijk is rekenen nu ook weer niet.
Ik denk dat veel van de gesignaleerde problemen van psychologische aard zijn, opgebouwd door plat rekenen in een goed-fout cultuur buiten de context van de echte wereld. Op weg dus maar naar gecijferdheid: echt rekenen in de wereld om ons heen. En wel graag voor 2032.

Noot

[1] Zie *https://ea.upc.edu/ca/matematiques-s2-etsab/personal/claudi-alsina/alsina_gaudi.pdf.*

Over de auteur

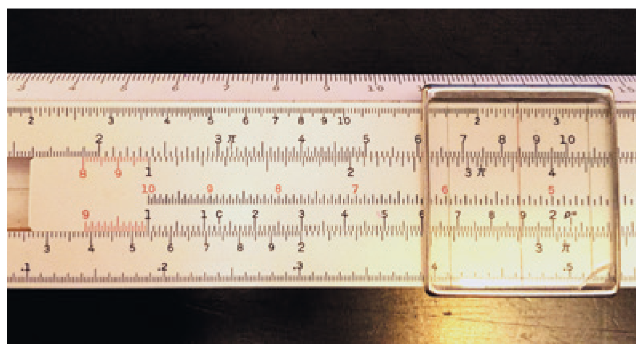
Kees Hoogland is vakexpert rekenen, wiskunde, gecijferdheid bij SLO. Website: *www.gecijferdheid.nl*,
E-mailadres: *cph@xs4all.nl*

1000!

Simon Biesheuvel

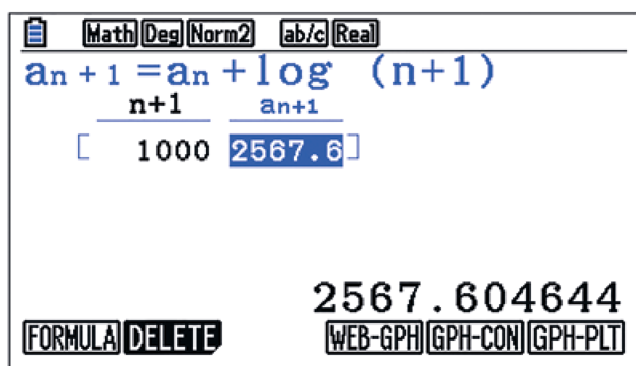
1000! kun je met de meeste rekenmachines niet uitrekenen, dat levert een *overflow error* op. Simon Biesheuvel laat zien hoe je met een slim programma dat toch voor elkaar kunt krijgen. En omgekeerd, hoe je iets dat je heel snel met een rekenmachine berekent ook snel kunt benaderen.

Als ik mijn leerlingen logaritmen uitleg, loop ik altijd naar de grote rekenliniaal die boven de deur hangt, zie figuur 1. Dan laat ik zien dat daar een logaritmische schaal is gebruikt. Een 1 heeft lengte nul. Van 1 naar 8 is drie keer zolang als van 1 naar 2. En log (2) + log(3) = log(6), als je 2 en 3 achter elkaar legt kom je inderdaad uit bij 6.
Zo deed ik dus vroeger mijn berekening 2,37 × 3,58, lees af: ≈ 8,48



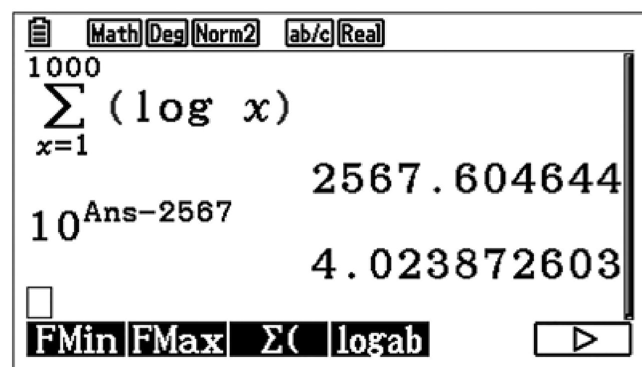
figuur 1

Het is wel leuk, maar een voorbeeld van een berekening die de leerlingen overbodig vinden. Op hun rekenmachine gaat dit toch veel eenvoudiger. Maar op een conferentie zag ik een echt leuke toepassing van de logaritme voor het berekenen van bijvoorbeeld 1000!. Het idee kwam van Anders Johnsson uit Zweden. Hij heeft een programma geschreven voor een Grafische Rekenmachine (GR).
Het programma berekent faculteiten die ook boven de 69! uitkomen. Dat kon ik al op de volgende manier: 69! = 1,711... $\cdot 10^{98}$ en dit maal 70 komt uit op > 10^{100} en dat accepteert mijn GR niet. Nu kun je natuurlijk het antwoord van 69! door 10^{50} delen en daarna met 70 (en dan met 71, enzovoort) vermenigvuldigen. Maal 70 wordt het dan ongeveer $1{,}198 \cdot 10^{50}$ en als je dat uit je hoofd met 10^{50} vermenigvuldigt, dan krijg je het antwoord $1{,}198 \cdot 10^{100}$. Zo kun je een stukje doorgaan, maar naar 1000! is het dan nog een heel eind.



figuur 2

Johnsson's methode voor 1000! is: $1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1000 = 10^{\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1000)}$. De exponent is gelijk aan log(1) + log(2) + ... + log(1000). Voor docenten en leerlingen die niet kunnen programmeren leg ik eerst een methode uit voor wiskunde A leerlingen via recursie. Het is wel leuk dit te doen op een manier die deze leerlingen tijdens een examen ook wel eens zelf moeten bedenken. Voer in op de GR:



figuur 3

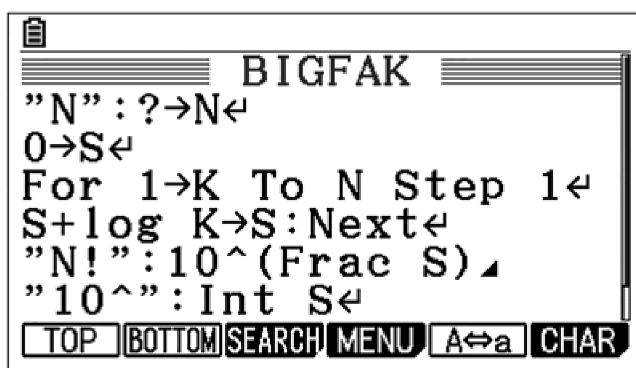
$a_{n+1} = a_n + \log(n + 1)$ met $a_1 = \log(1) = 0$ en bereken vervolgens a_{1000}. Dat geeft 2567,604644, zie figuur 2.
We vinden nu: $1000! \approx 10^{2567{,}604644} = 10^{0{,}604644} \cdot 10^{2567} \approx 4{,}02387 \cdot 10^{2567}$. De uitkomst is vrij goed. Wolfram Alpha geeft als uitkomst van 1000! het getal: 4,02387260077 093773543702433923003985719374864 2 $\cdot 10^{2567}$. Voor wiskunde B leerlingen die recursie niet kennen is er ook een andere manier, zie figuur 3, met zelfs een beter resultaat dan met de recursie. Het programma van Anders Johnsson is geschreven voor de Casio CG20, zie de figuren 4 en 5.
Dit levert voor 1000! het resultaat op: $4{,}023872603 \cdot 10^{2567}$.

In de oudheid wortel twintig schatten.
Ook werd op die conferentie getoond hoe ruim 2000 jaar geleden een schatting van √20 werd berekend. (Ik weet niet of die schatting van Euclides is, dat werd niet vermeld). Doe een schatting voor √20, kies bijvoorbeeld 4; 20 : 4 = 5 dus 4 × 5 = 20 en √20 moet zich dus tussen 4 en 5 bevinden. Neem als tweede schatting het gemiddelde van 4 en 5. De tweede schatting is dus $\frac{4 + 20 : 4}{2} = 4\frac{1}{2}$.

De derde schatting is $\frac{4\frac{1}{2} + 20 : 4\frac{1}{2}}{2} = 4\frac{17}{36}$. Het kwadraat is $20\frac{1}{1296}$, dus al best wel nauwkeurig. De vierde schatting is $4\frac{5473}{11592} \approx 4{,}472135956\ldots$ met als kwadraat ongeveer 20,00000001. Hoewel leerlingen op hun rekenmachine veel sneller aan een benadering van √20 kunnen komen, is de methode en de snelheid waarmee een goed resultaat wordt bereikt toch leuk genoeg om in de klas te laten zien.



figuur 4



figuur 5

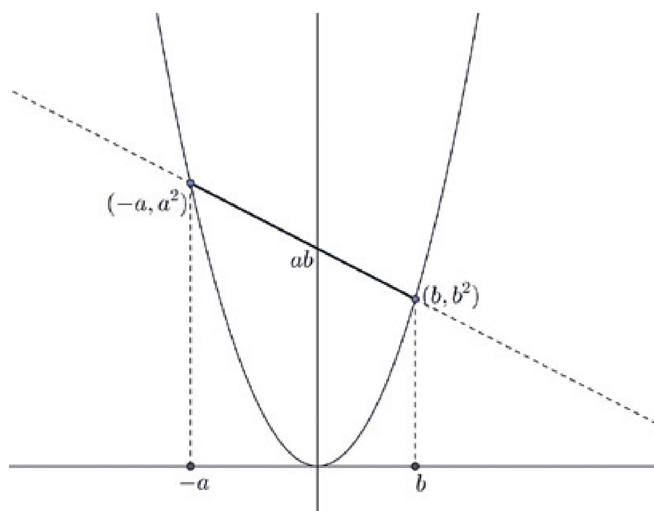
Over de auteur
Simon Biesheuvel is docent wiskunde aan het Willem de Zwijger College in Bussum. E-mailadres: *s.biesheuvel@wdz.nl*

DE PARABOOL IN HET *MATHEMATIKUM*

Jos Alkemade

In *Euclides* 91-2 van november 2015 schreef Ab van der Roest over een mooie ervaring in het Mathematikum[1]. Jos Alkemade borduurt hier op voort: van de parabool in het *Mathematikum* in slechts een paar stappen naar de Lagrange-interpolatie.

Naar aanleiding van het bord met de parabool (vergelijking $y = x^2$), de spijkers en het touwtje ging Ab met leerling Jesse aan de slag met het bewijzen van een vermoeden: Als $A(-a, a^2)$ en $B(b, b^2)$ twee punten op de parabool zijn, met a en b positief, dan snijdt het lijnstuk AB de y-as in het punt $(0, ab)$. Hier zijn a en b positief verondersteld, opdat het touwtje de y-as snijdt.
Zie figuur 1.



figuur 1 De stelling van het *Mathematikum*

Het artikel was voor mij de aanleiding tot het schrijven van dit stukje, als aanzet wellicht tot een verdiepingsactiviteit. Het eerste bewijs van Ab en Jesse maakt gebruik van het opstellen van de vergelijking van de lijn door twee punten. Een tweede bewijs is ook algebraïsch en loopt via de kwadratische vergelijking voor de x-coördinaten van de snijpunten van parabool en lijn. Na het bewijs is het vermoeden een stelling geworden.

Allereerst is het interessant om op te merken dat de stelling ook geldt als $ab < 0$. Het algebraïsche bewijs van Ab en Jesse geldt dan nog steeds, ook al snijdt het touwtje de y-as niet meer. De punten A en B liggen dan immers aan dezelfde kant van de y-as. Het is ook interessant om te kijken wat er gebeurt als het punt A steeds dichter tot B nadert. De lijn AB nadert dan tot de raaklijn aan de parabool in B. Verder nadert $-a$ tot b en het product ab gaat naar $-b \times b = -b^2$. De raaklijn snijdt de y-as dus in $(0, -b^2)$. Hiermee volgt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in B *zonder differentiëren*: de richtingscoëfficiënt is $(b^2 - (-b^2))/b = 2b$.
Het startgetal krijgen we cadeau en de vergelijking van de raaklijn in B is $y = 2bx - b^2$.

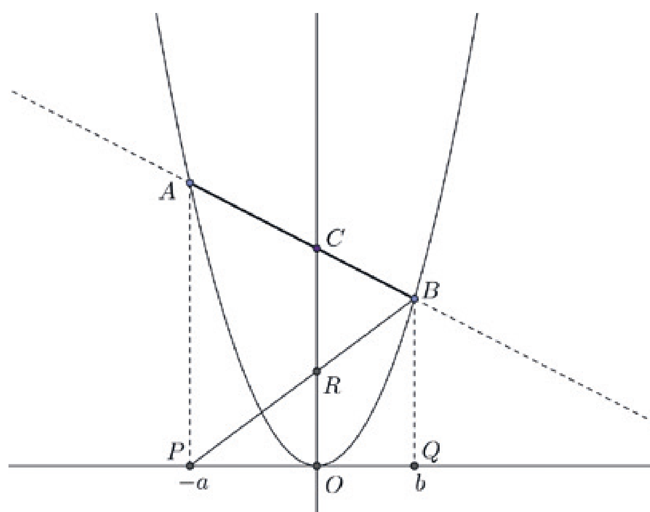
Een meetkundig bewijs

We maken nu een meetkundig uitstapje. Dit uitstapje leidt tot een mooie oefening met gelijkvormige driehoeken.
A en B zijn weer de punten op de parabool behorende bij x-coördinaten $-a$ en b, met $a > 0$ en $b > 0$. Het snijpunt van de lijn AB met de y-as noemen we $C(0, c)$. De voetpunten van de loodlijnen vanuit punt A respectievelijk B op de x-as noemen we $P(-a, 0)$ en $Q(b, 0)$. De oorsprong noemen we zoals gebruikelijk O. Zie figuur 2. In de figuur is ook het lijnstuk PB getekend en het snijpunt R ervan met de y-as.

Voor de y-coördinaat c van C geldt natuurlijk:
(1)... $c = |OR| + |RC|$
Omdat driehoek PQR gelijkvormig is met driehoek PQB volgt

$$|OR| = \frac{|PO|}{|PQ|} \cdot |BQ| = \frac{a}{a+b} \cdot b^2 .$$

figuur 2 Meetkundig bewijs



Ook zijn de driehoeken *BCR* en *BAP* gelijkvormig, zodat

$$|RC| = \frac{|RB|}{|PB|} \cdot |PA| = \frac{|OQ|}{|PQ|} \cdot |PA| = \frac{b}{a+b} \cdot a^2$$

Hierbij is en passant ook de eerste gelijkvormigheid gebruikt. Invullen in (1) geeft dan:

$$c = \frac{a}{a+b} \cdot b^2 + \frac{b}{a+b} \cdot a^2 = ab$$

waarmee de stelling wederom volgt.

Interpolatie

In de meetkundige redenatie wordt feitelijk pas aan het eind de koppeling met de parabool gelegd. Laten we eens kijken wat er overblijft als we de context van de parabool loslaten.

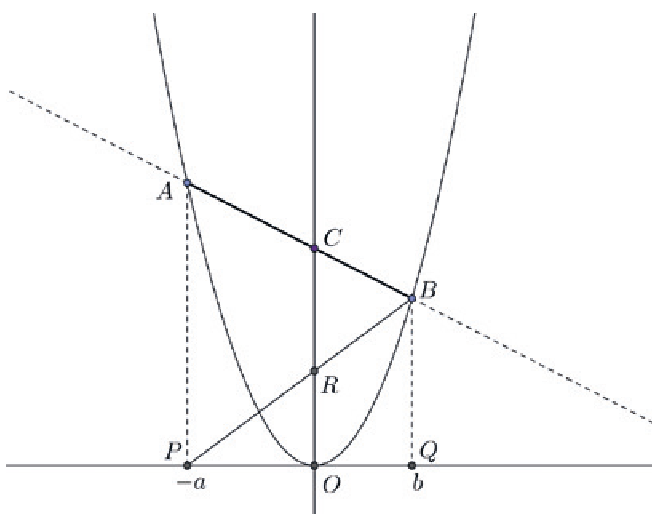
$A(a, u)$ en $B(b, v)$ zijn twee gegeven punten. $C(x, y)$ is een punt op het lijnstuk *AB*. De punten $P(a, 0)$, $Q(b, 0)$ en $X(x, 0)$ zijn de voetpunten van de loodlijnen uit *A*, *B* en *C* op de *x*-as. Zie figuur 3. Verder is het lijnstuk *PB* ingetekend en het snijpunt *R* van *PB* en *CX*.

Het punt *X* neemt de plaats in van de oorsprong in figuur 2. We gaan nu de *y*-coördinaat van *C* uitdrukken in de andere grootheden. Natuurlijk geldt: $y = |CX| = |CR| + |RX|$. Hieruit volgt, met behulp van de gelijkvormigheid van de diverse driehoeken en op soortgelijke manier als hierboven, dat

$$(2)\ldots\quad y = \frac{b-x}{b-a} \cdot u + \frac{x-a}{b-a} \cdot v$$

Hiermee zijn we zomaar aangeland bij de interpolatieformule van Lagrange [2] voor lineaire interpolatie! Formule (2) biedt een mooie gelegenheid om enige aandacht te besteden aan *symbol sense*. We bekijken de formule vanuit twee perspectieven.

figuur 3 Interpolatie



Vanuit het eerste perspectief laat de formule zien hoe, voor een gegeven *x*-waarde, de bijbehorende *y*-waarde is opgebouwd uit een fractie van *u* en een fractie van *v*.

Deze fracties zijn respectievelijk $\frac{b-x}{b-a}$ en $\frac{x-a}{b-a}$. Merk op

dat de fracties voor elke *x* optellen tot 1. Het is interessant om te zien hoe de fracties veranderen met *x*. Als het punt *X* bijvoorbeeld samenvalt met *A*, dan is $x = a$ zodat (2) reduceert tot $y = 1u + 0v = u$, de *y*-coördinaat van *A*. Als *X* het midden is van *AB* dan is $x = ½(a + b)$, zijn beide fracties ½ (dit geeft tussendoor nog even een kleine oefening in algebraïsche vaardigheid) en is $y = ½(u+v)$.

Een tweede perspectief om naar formule (2) te kijken is deze te interpreteren als lineaire combinatie,

$ul_1(x) + vl_2(x)$ van de twee (lineaire) functies $l_1(x) = \frac{b-x}{b-a}$

en $l_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Een terugkoppeling naar de bekende

vergelijking $y = mx + d$ voor een rechte lijn (die immers ook is te interpreteren als lineaire combinatie: $y = me_1(x) + de_0(x)$, waar $e_1(x) = x$ en $e_0(x) = 1$) biedt nog een mooie gelegenheid om dieper op het begrip lineaire combinatie in te gaan.

Tot slot

Een verdiepende opdracht, met de parabool van het *Mathematikum*, de algebraïsche bewijzen van Ab en Jesse, een meetkundige bewijs als het bovenstaande met het uitstapje naar Lagrange-interpolatie als ingrediënten, vormt denk ik een mooie uitdaging. En, zoals altijd in de wiskunde is het mogelijk nog een stapje verder te gaan. Zo ligt de Lagrange-interpolatieformule voor kwadratische interpolatie binnen handbereik. En er kan (uitgaande van de tweede interpretatie van (2)) zelfs een eerste stap gezet worden richting functieruimten (en bases)!

Noten

[1] Roest, A. Van der (2015). Vastgeroest: Met Jesse in het Mathematikum. *Euclides, 91*(2).

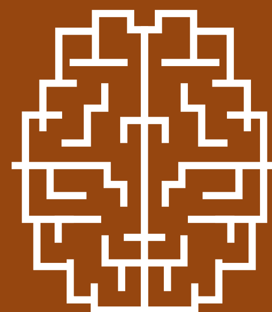
[2] Op *wikipedia* (*https://nl.wikipedia.org/wiki/Interpolatie#Lagrange-interpolatie*) kun je meer over Lagrange-interpolatie lezen. Het artikel Lagrange-polynomen van Dick Klingens (zie *www.pandd.nl/downloads/lagrange.pdf*) gaat nog een stapje verder.

Over de auteur

Jos Alkemade is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Windesheim. E-mailadres: *jah.alkemade@windesheim.nl*

PUZZEL 91-6

HET VULLEN VAN VIERKANTEN OF KUBUSSEN MET RECHTHOEKEN OF BALKEN



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Er is in de literatuur veel te vinden over vierkanten of rechthoeken, geheel gevuld met vierkanten of gelijkvormige rechthoeken.[1] Ook zijn in het verleden puzzels in *Euclides* verschenen over rechthoeken gevuld met vierkanten, zoals de laatste puzzel van Frits Göbel.[2] Maar toch valt er hiermee nog heel wat te puzzelen. Frits stuurde ons nog wat ideeën om vierkanten te verdelen in rechthoekige stukjes. En daar is deze puzzel onder andere op gebaseerd. Voor alle opgaven geldt: twee oplossingen zijn gelijk als de verzameling stukjes hetzelfde is. Voor opgaven 1 t/m 3 en 5 vragen we u om de maten en vorm van de verschillende stukjes, een formule om dat te bepalen en een schets of duidelijke beschrijving hoe u de stukjes in het vierkant of de kubus heeft geplaatst.
We beginnen driedimensionaal, waarmee we dus een beroep doen op uw ruimtelijk inzicht: het vullen van een kubus met onderling gelijkvormige balken, dus niet per se allemaal even groot. Daarmee zijn aanzienlijk minder mogelijkheden dan in het platte vlak.

Opgave 1 – Bepaal voor $n = 5$, $n = 6$ en $n = 10$ alle manieren hoe een kubus in n gelijkvormige balken is te verdelen.
En nu vierkanten vullen met vierkanten, ook niet per se allemaal even groot.
Opgave 2 – Bepaal alle waarden van n waarvoor het niet mogelijk is om een vierkant op te vullen met precies n vierkanten? Leg uw bewering uit.
Vervolgens vullen we een vierkant van 1×1 met onderling gelijkvormige rechthoeken. Een systematische aanpak kan helpen, maar er valt ook nog wel wat te rekenen.
Opgave 3a – Bepaal alle mogelijkheden om een vierkant met zijden 1 geheel op te vullen met drie gelijkvormige rechthoeken.
Opgave 3b – Idem met vier gelijkvormige rechthoeken.
We vragen u om zo mogelijk een exacte verhouding $1 : x$ van de zijden van de rechthoeken te geven, waarbij $0 < x \leq 1$.
In andere gevallen (x niet rationaal) mag u volstaan met een benadering in drie decimalen.
Opgave 4 – Een vierkant van 1 bij 1 is geheel gevuld met n rechthoeken met $x = \frac{3}{8}$. Voor welke n is dit mogelijk? Licht uw antwoord toe.

En ten slotte:
Opgave 5 – Zijn er andere vormen dan rechthoeken of vierkanten waarmee we een vierkant geheel kunnen opvullen, ook hier onder de voorwaarde dat die vormen onderling gelijkvormig zijn? Voor twee of vier stukjes is het bijna evident dat er veel mogelijkheden zijn. Voor $n = 3$ is een voorbeeld met gelijkbenige rechthoekige driehoeken heel voor de hand liggend, maar kunt u nog een andere oplossing vinden voor $n = 3$? Zo ja, geef een voorbeeld.
We zijn ons er van bewust dat er heel wat te tekenen valt. En dat is lastig met een tekstverwerker. Maar u kunt uw eventueel hand gemaakte versie scannen, of nog moderner, fotograferen. En dan is er natuurlijk ook nog de gewone post.

Noten

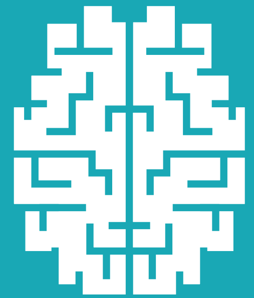
[1] Zie bijvoorbeeld *https://en.wikipedia.org/wiki/Squaring_the_square*
[2] Göbel, F. (2011). Verdelingen in vierkanten. *Euclides, 86*(7)

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 20 juni 2016 binnen zijn.

UITWERKING PUZZEL 91-4

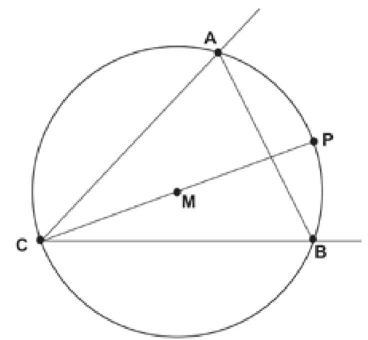
KORTSTE WEG VAN A NAAR B



Wobien Doyer
Lieke de Rooij

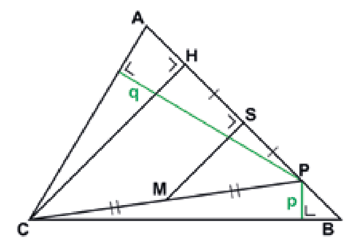
Alle vragen gingen over een driehoek *ABC*, waarbij hoek *C* is gegeven en een punt *P*, waarbij *AB* minimaal moest zijn. We gebruiken steeds: hoek$A$ = α, hoek$B$ = β, $\tan\beta = t_\beta$, hoek$C$ = γ, $\tan\gamma = t_\gamma$ en tan(□*PCB*) = *p*.

In opgave 1 werd gevraagd de punten *A* en *B* te construeren, waarbij *AB* zo kort mogelijk is en *P* op de omgeschreven cirkel ligt van driehoek *ABC*. Lijnstuk *AB* is dan een koorde van een cirkel *k* door *C* en *P*, waarbij hoek *C* vast ligt. Dus *AB* is minimaal als de straal van *k* minimaal is. En dat is het geval als *CP* middellijn is van *k*. Daarmee is de constructie eenvoudig: we hebben hoek *C* en punt *P*. Teken de cirkel met middellijn *CP* en bepaal de snijpunten met de benen van hoek *C*. Die snijpunten zijn *A* en *B*, zie figuur 1.



figuur 1

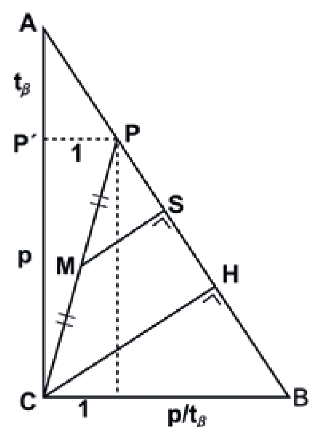
Bij de volgende vragen moest *P* op *AB* liggen en weer *AB* minimaal. Bij **opgave 2** was gegeven γ = 90° en tan(∠*PCB*) = *p*. We vroegen om t_β te bepalen. Dit is het wel bekende ladderprobleem, waarover toevallig een mooi artikel stond in dezelfde *Euclides*.[1] Aldaar kunt u de uitwerking van opgave 2 vinden. Voor het algemene geval (**opgave 2b**), vinden we dan $t_\beta^3 = p$. In **opgave 2a** was gegeven $p = 8$, zodat $t_\beta = 2$.



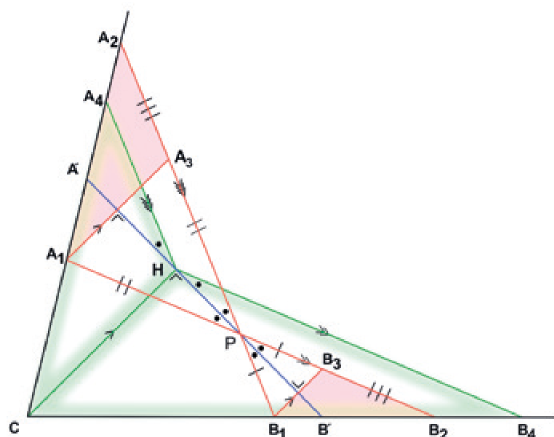
figuur 2

We poneerden de volgende stelling, die een mooie aanvulling geeft voor alle ladderproblemen: ***AB* minimaal** ⇔ ***AH* = *BP***, waarbij *H* = voetpunt van de hoogtelijn uit *C*. Of: ***AB* minimaal ⇔ de middelloodlijn van *AB* gaat door het midden van *CP***, zie figuur 2. *CH* is de hoogtelijn uit *C* en *MS* de middenparallel in driehoek *CPH* die evenwijdig is aan *CH*. Dan staat *MS* loodrecht op *AB* en dus: *AH* = *BP* ⇔ *MS* is de middelloodlijn van *AB*. Bovenstaande beweringen zijn dus equivalent.

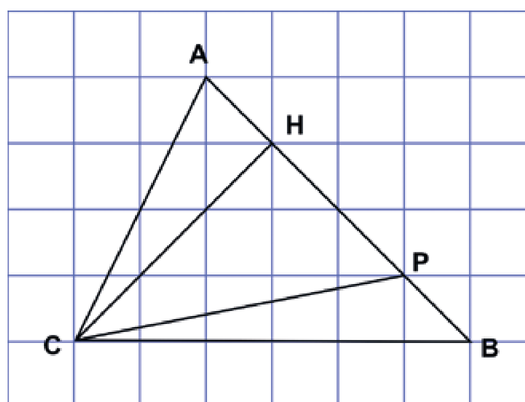
In **opgave 3** moest u die stelling controleren voor γ = 90°. Dit kon bijvoorbeeld door de coördinaten van *M*, *A* en *B* uit te drukken in t_β , zie figuur 3. We krijgen dan met *C*(0, 0) en *P*(1, *p*): *M*(1/2, *p*/2), $A(0,\ p + t_\beta)$ en $B(1 + p/t_\beta,\ 0)$. We kunnen dan *MA* en *MB* berekenen, en met $p = t_\beta^3$ levert dat *MA* = *MB*. Dus geldt de tweede bewering.
Bij **opgaven 4 en 5** was echter hoek *C* = γ niet recht. Ook dan geldt die stelling en die mocht u gebruiken, ook zonder bewijs: dat was optioneel. Helaas heeft niemand ons verrast met een puur meetkundig bewijs. Wel gaven enkelen een analytisch bewijs. *AB* minimaal levert dan dezelfde vergelijking op als *AH* = *BP*.
We kiezen hier voor een goniometrische aanpak, dat geeft het minste rekenwerk en bovendien rolt daar een mooie formule uit, die bij γ = 90° en *P*(1, *p*) direct overgaat in $p = t_\gamma^3$, zoals bij opgave 2. Als *AB* minimaal: $AB = AP + BP = q/\sin\alpha + p/\sin\beta$, zie figuur 2, differentiëren naar β en gelijk aan 0 stellen:
$q\cdot\cos\alpha/\sin^2\alpha - p\cdot\cos\beta/\sin^2\beta = 0$ dus $p/q = (\sin^2\beta/\sin^2\alpha)\cdot(\cos\alpha/\cos\beta)$.
Als *AH* = *BP*: dan ook *AP* = *BH*. Dan is: $p/\sin\beta = BP = AH = AC\cdot\cos\alpha$, dus
$p = AC\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha$ en analoog: $q = BC\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha$.
Dus $p/q = (AC/BC)\cdot(\sin\beta\cdot\cos\alpha)/(\cos\beta\cdot\sin\alpha)$. En dan vertelt de sinusregel ons:
$AC/BC = \sin\beta/\sin\alpha$. Invullen geeft: $p/q = (\sin^2\beta/\sin^2\alpha)\cdot(\cos\alpha/\cos\beta)$, dezelfde verge-



figuur 3



figuur 4



figuur 5

lijking als bij AB minimaal. Dit bewijst de stelling. Strikt genomen moet je dan nog aantonen dat die vergelijking maar één oplossing heeft en dat dat een minimum is. Dat kan door de tweede afgeleide te bepalen, die blijkt in het relevante gebied altijd positief. Belangstellenden kunnen we dat opsturen.

J. Guichelaar stuurde een meetkundig bewijs met infinitisemaalrekening. We geven hier een variant zonder die infinitisemaalrekening, die tevens inzicht geeft waar die stelling op is gebaseerd, zie figuur 4. Hierbij tekenen we eerst een 'willekeurige' lijn A_1B_2 en een lijn A_2B_1 (rood) door P, zodat $A_1B_2 = A_2B_1$ De naamgeving is misschien wat vreemd, maar maakt het vervolg leesbaarder. $A'B'$ is de bissectrice (blauw). De kortste AB zal ergens tussen de lijnen A_1B_2 en A_2B_1 in liggen. Verder tekenen we A_1A_3 en B_1B_3, met $A_3P = A_1P$ en $B_3P = B_1P$. Dan geldt: $A_2A_3 = B_2B_3$ en $A_1A_3 // B_1B_3$. We tekenen ook de loodlijn CH op $A'B'$ en $A_4H // A_2B_1$ en $B_4H // A_1B_2$ (groen).
Gevolg van al die evenwijdige lijnen is: driehoek $A_1A_2A_3$ is gelijkvormig aan driehoek CA_4H , driehoek $B_1B_2B_3$ is gelijkvormig aan driehoek CB_4H en driehoek PA_1A_3 is gelijkvormig aan driehoek PB_1B_3. Uit die gelijkvormigheden kunnen we aantonen: $HA_4/HB_4 = PB_1/PA_1$. Zorgen we nu dat de hoek tussen A_1B_2 en A_2B_1 nul wordt, dan vallen alle punten A samen en ook alle punten B, waarmee we de kortste AB te pakken hebben. A, H, P en B liggen dan op één lijn en AH staat loodrecht op AB. De bovengenoemde verhoudingsformule $HA_4/HB_4 = PB_1/PA_1$ blijft intact en wordt dan $HA/HB = PB/PA$, waaruit direct volgt dat $AH = BP$. Q.E.D.

In **opgave 4** was gegeven: $\tan(\gamma) = 2$ en $\tan(\angle PCA) = 1/5 = p$ en werd β gevraagd. De tip was: teken het eerst op ruitjespapier om de vermoedelijke oplossing te vinden. En dan bleek dat $\beta = 45°$. Dat moeten we dan natuurlijk wel met een berekening controleren, maar we zien dat in figuur 5 inderdaad geldt $AH = BP = \sqrt{2}$.

Opgave 5: Bepaal een voorbeeld van een gelijkbenige driehoek ABC, waarbij $AC = AB$, met P op AB, A, B, C en P op roosterpunten en AB minimaal. We kiezen helling $CA = v/u$ en helling $AB = -v/u$. Merk op dat om een scherphoekige driehoek te krijgen we $u < v$ moeten kiezen. De lijn loodrecht op AB heeft dan helling u/v. Kiezen we $C(0, 0)$ en $H(v, u)$, dan zijn de coördinaten van A, B en P altijd rationale getallen. We kunnen de figuur dan uitvergroten tot alle coördinaten geheel zijn. Een voorbeeld: $t_\gamma = 3/2$ geeft: $C(0, 0)$, $A(26, 39)$, $B(52, 0)$, $H(36, 24)$ en $P(42, 15)$.

Noot

[1] Jansen, J. (2016): Uitdagende problemen: Ladderzat. *Euclides, 91*(4).

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 91-4 is:

Naam	Punten	Naam	Punten
H. Bakker	199	L. Pos	134
J. Meerhof	197	H. Linders	131
K. Vugs	191	A. Grunefeld	86
J. Verbakel	188	J. Guichelaar	79
H. Klein	159	K. van der Straaten	78

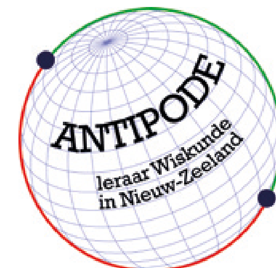
We feliciteren Harm Bakker van harte met de ladderprijs.

TEGENVOETER

Roland Meijerink

TROTS

Sinds begin vorig jaar ben ik docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek houd ik u op de hoogte van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld.





Proudly Karamu, Proudly Hastings, Proudly learning. Afgelopen anderhalf jaar heb ik mogen ervaren dat de missie van de school niet bestaat uit holle woorden van de schoolleiding, maar dat ze echt de basis vormen van wat personeel en leerlingen op school doen.
'We zijn trots op Karamu High School, dragen het uniform met trots, zijn welgemanierd en houden de school schoon en veilig.' Ik heb in Nederland niet vaak mogen ervaren dat leerlingen (of personeel) uitgesproken trots zijn op hun school. Misschien met uitzondering van de open dag, of een toespraakje bij de diploma-uitreiking. Ik heb het idee dat dit hier echt anders is. Meer dan de helft van de leerlingen sport in competitieverband tegen andere scholen: van rugby tot kleiduivenschieten en van schaken tot kanopolo. Ook zijn er veel extra-curriculaire activiteiten (meestal wedstrijden) op het gebied van debat, kunst en wetenschap. Dan vertegenwoordigen de leerlingen vol trots de school. Aan het begin van het schooljaar worden uit de oudste leerlingen zogeheten *leaders* gekozen op het gebied van sport, cultuur en schoolprestaties. Zij zijn een rolmodel voor de rest van de school. Het is fantastisch om de toespraken te horen die leerlingen bij hun sollicitatie houden, waarin ze welgemeend uitleggen hoeveel de school voor ze betekend heeft en dat ze iets terug willen doen.
'We zijn trots op de stad Hastings, steunen organisaties in de lokale gemeenschap en omarmen de multiculturele samenleving.' Of het nu gaat om de jaarlijkse dodenherdenking op *ANZAC Day*, een triathlon voor leerlingen van de basisschool, of het vieren van het begin van de lente op *Blossom Day*: onder aanvoering van de *leaders* gaat er een afvaardiging van school heen. Het multiculturele aspect gaat voornamelijk om de culturele mix tussen Maori's (oorspronkelijke bewoners) en Pakeha (immigranten van Europese afkomst).
'We zijn trots dat we kunnen leren, respecteren het recht van anderen daartoe, doen ons best en vragen waar nodig om hulp, en vieren successen.' Dat vieren gebeurt door middel van allerlei prijzen en certificaten voor bijzondere schoolprestaties, of successen op het gebied van sport en cultuur. Die prijzen worden gedurende het jaar uitgereikt tijdens *assemblies* (bijeenkomsten van de hele school) of aan het einde van het jaar bij *prizegiving* (een middag of avond met ouders). De leerlingen zijn hier heus niet perfect. Het is niet vanzelfsprekend dat ze hun huiswerk doen als je het niet controleert. Ze vergeten hun boeken wel eens, al hebben ze gelukkig geen kluisjes. Ze maken er een puinhoop van als je geen orde houdt. En vooral jongens vinden het niet altijd leuk om op het podium 'beloond' te worden voor een bijzondere prestatie. Maar over het algemeen vind ik dat leerlingen hier een stuk gedisciplineerder, verantwoordelijker en vooral ambitieuzer zijn dan in Nederland. Of dat nu voornamelijk externe motivatie is (studiebeurzen, toelating tot vervolgopleiding), de verdienste van de school, of cultureel bepaald? Daar ben ik nog niet helemaal achter.

'PROUDLY KARAMU, PROUDLY HASTINGS, PROUDLY LEARNING.'

Meer lezen? Ga naar *www.tegenvoeters.nl* of stuur een reactie naar *rmeijerink@karamu.school.nz*

BOEKBESPREKING

WISKUNDIGEN MOGEN NIET HUILEN



Adri Dierdorp



Auteur: Gerardo Soto y Koelemeijer
Uitgever: Amsterdam University Press (2015)
ISBN: 978-90-8964-906-5
Prijs: € 17,95 {144 pagina's; paperback)

Wiskundigen mogen niet huilen is de intrigerende titel van een pas verschenen verzameling essays die tot doel hebben de lezer tot nadenken aan te zetten over twee belangrijke vragen, namelijk Wat is wiskunde? en Waarom moeten leerlingen dit leren? Dat de auteur Gerardo Soto y Koelemeijer in zijn opzet grotendeels is geslaagd, moge blijken uit deze recensie en uit de reactie van Jeanine Daems, die het voorwoord van het boek schreef. U kent haar wel, Daems, één van de wiskundemeisjes. In haar voorwoord lezen we dat verhalen over wiskundehelden deel van onze cultuur uitmaken en daarom verteld moeten worden. En dat is nu precies wat Soto y Koelemeijer in dit boek doet: verhalen vertellen over wiskundehelden. Vaak door parallellen te trekken met grootheden uit de sport en altijd met de twee hierboven genoemde vragen in het achterhoofd. Soto y Koelemeijer, een in de wiskunde gepromoveerde wiskundeleraar op een middelbare school, studeerde ook literatuurwetenschap en is tevens auteur van een aantal romans. Zijn brede academische vorming vindt zijn weerslag in zijn boek. Het is veelzijdig, erudiet en is geschreven op een toegankelijke en stijlvolle manier. De kans bestaat dat het zal doordringen tot een breder lezerspubliek.

In hoofdstuk 1 gaat de auteur uitvoerig in op de eerste vraag: Wat is wiskunde? De vraag stellen is belangrijker dan haar beantwoorden. De lezer moet dan ook geen afdoende antwoord verwachten. Soto y Koelemeijer breekt bij aanvang een lans voor de filosofie van de wiskunde, hetgeen impliceert dat een waardeoordeel van de auteur over de staat van het huidige wiskundeonderwijs niet lang op zich laat wachten. Dat oordeel valt niet bijster positief uit. Hij is de mening van veel prominente wiskundigen toegedaan dat het wiskundeonderwijs zich teveel concentreert op het oefenen van 'regeltjes' en te weinig stimuleert tot zelf nadenken. Hij besteedt dan ook veel aandacht aan de Amerikaanse wiskundige Reuben Hersh, die vier mythen over wiskunde heeft geformuleerd: eenheid, universaliteit, zekerheid en objectiviteit. Ten gevolge van deze mythen pleit Soto y Koelemeijer voor denkactiviteiten in het wiskundeonderwijs. Als een van de schaarse voorbeelden op dit vlak vertelt hij over zijn manier om samen met leerlingen tot een formule te komen voor de oppervlakte van een driehoek. Op deze wijze wordt een deel van een mogelijk antwoord op de vraag Wat is wiskunde? zichtbaar. Het gaat om de bekende wiskundige denkactiviteiten: modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, logisch redeneren en bewijzen.

Om zijn ideeën over het wiskundeonderwijs te onderbouwen maakt Soto y Koelemeijer een uitstapje naar de filosofie van de wiskunde. Hij bespreekt drie stromingen: formalisme, logicisme en het platonisme. Op school blijven we volgens hem en volgens de deskundigen die hij aanhaalt vaak in het formalisme hangen, terwijl het platonisme haalbaar is. Dit laatste houdt in dat 'alle bewijzen, en alle wiskundige ideeën en concepten reeds bestaan. Ze moeten alleen nog door ons ontdekt worden (pagina 28).' Voor de docent komt het er dus op aan de juiste vragen te stellen. Dit gegeven roept Plato's verhaal Menoon in herinnering. Daarin laat Socrates door de juiste vragen te stellen een ongeschoolde slaaf een min of meer wiskundige stelling bewijzen, een didactisch principe dat we in onze tijd terugvinden bij Freudenthal's *guided reinvention*. Soto y Koelemeijer sluit het hoofdstuk af door koppelingen te maken met kunst en sport. Ook geeft hij, zoals een moderne docent betaamt, aardige tips om bepaalde YouTube-filmpjes te bekijken. Zijn eerste YouTube tip bleek zelfs ondertiteld te zijn en is zeker een aanrader om in de klas te bekijken.
In het tweede hoofdstuk, *Meesters van het spel*, vertelt hij afwisselend verhalen over de beroemde schaakkampioen Bobby Fisher en de grote Franse wiskundige Alexander Grothendieck. In veertien verhalen vertelt hij over een onrustige jeugd, een levenslange passie, meer

kunnen zien dan anderen, gloriejaren, de ommekeer, een kluizenaar ontwaakt en zelfinkeer van de beide heren. Telkens eerst over Fisher en daarna over Grothendieck. Er worden prachtige parallellen getrokken en de lezer krijgt meteen een interessant stukje geschiedenis op de koop toe. Grothendieck, die in zijn jeugd slechte ervaringen had gehad met het onderwijs, wordt door Soto y Koelemeijer - bijna anachronistisch - betiteld als een *excellente* docent. Ter verantwoording van dit predicaat schrijft hij dat Grothendieck er alles aan deed om zijn studenten begrippen duidelijk uit te leggen, dat hij heel geduldig was en dat hij voorbeelden bedacht die de abstracte theorieën ondersteunden (pagina 53).
Het volgende hoofdstuk is getiteld *Kunnen zuigelingen rekenen*? Het schijnt dat zij daar enigszins toe in staat zijn. Wederom passeren verscheidene prominente onderzoekers de revue, waarna experimenten van de ons allen bekende Piaget besproken worden. Via de rekenvaardigheden van dieren wordt een sprong gemaakt naar Russell en Peano en komt ook het bewijs van 1 + 1 = 2 ter sprake. Via de elementaire bewerking optelling die volgens dit boek ook door dieren wordt begrepen krijgt u meteen weer een stukje geschiedenis van de wiskunde door 30.000 jaar terug te gaan waar de combinatorische technieken, weliswaar zeer bescheiden, door de handel noodzakelijk werden.
Het vierde hoofdstuk *Wiskundigen mogen niet huilen of de Hand van God* heeft dezelfde structuur als het tweede hoofdstuk. Alleen worden nu voetballer Maradonna en wiskundige Andrew Wiles afwisselend besproken en vergeleken. Nu wordt ook de titel van het boek duidelijk. Soto y Koelemeijer vertelt dat hij zijn leerlingen vaak de documentaire laat zien waarin Wiles vertelt over het traject waarin hij het bewijs leverde voor de laatste stelling van Fermat. Zouden veel wiskundeleraren dat niet doen? Ondergetekende deed het in ieder geval wel. Eén van de mooiste momenten uit de documentaire is wanneer Wiles niet meer uit zijn woorden kan komen omdat hij overmand door emotie moet huilen. Dat was toen hij vertelde dat alle onderdelen van het bewijs op hun plaats vielen. Het *Eureka* moment. Sommige leerlingen vinden het vreemd dat iemand daarom moet huilen. Pas als Soto y Koelemeijer een topprestatie in de sport noemt, snappen die leerlingen vaak waarom er tranen stromen. Volgens Maradonna was zijn beslissende doelpunt in het WK van 1986 geleid door de hand van God. Ook hier is sprake van emotie. Zowel Wiles als Maradonna hadden een jongensdroom, talent en passie en bereikten met eindeloos werken hun doel. Zeer leerzaam. Het is een spannend hoofdstuk met weer de nodige geschiedenis en een kijkje in het leven van een onverwacht duo: een voetballer en een wiskundige.

Het laatste hoofdstuk maakt nog eens duidelijk waarom u als wiskundedocent of – liefhebber het boek moet lezen. Het draagt de titel *Meneer, waarom moeten we dit leren*? Met een prachtig citaat van Pólya als goede binnenkomer worden er al snel argumenten aangedragen waarom schoolwiskunde vaak saai is. Ook wordt besproken waarom Wiskunde is leuk, Wiskunde is prachtig, Wiskunde heeft vele toepassingen en Wiskunde lijkt op muziek door Odifreddi als groteske misverstanden worden afgedaan. Misverstand Wiskunde heeft vele toepassingen laat zien dat de voorbeelden vaak gekunsteld zijn en dat je eigenlijk naar de praktijk moet kijken en daarbij moet uitzoeken welke wiskunde nodig is. Interessant om te lezen, zeker voor de schrijver dezes, want daar precies ging zijn proefschrift over. Tegenwoordig loopt er trouwens een uitstekend project over onderwijs, gebaseerd op de praktijk. Kijkt u maar eens op *www.projects.science.uu.nl/Mascil/*. Hoewel we helaas geen echt eenduidig antwoord krijgen op de vraag waarom onze leerlingen dit moeten leren, wordt wel aangegeven dat het vooral gaat om een manier van lesgeven die de leergierigheid stimuleert. De link naar denkactiviteiten dringt zich dan weer onvermijdelijk op.
In dit laatste hoofdstuk buigen allerlei grootheden zich weer over de gestelde vraag Meneer, waarom moeten we dit leren? Uiteindelijk wordt er gepleit voor *CUN*-opdrachten (*complex*, *unfamiliar*, *nonroutine*) met als voorbeelden de Wiskunde Alympiade en de Wiskunde B-dag. Een andere interessante inbreng in de discussie is afkomstig van Wouter van Joolingen, wetenschappelijk directeur van het Freudenthal Instituut, die een lans breekt voor de geschiedenis van de wiskunde als verplicht onderdeel van het wiskundecurriculum. Een gedachte die ongetwijfeld in goede aarde zal vallen bij zijn voorganger Jan van Maanen, die immers regelmatig aantrekkelijk lesmateriaal presenteerde met de geschiedenis van de wiskunde in een prominente rol.

Soto y Koelemeijer besluit zijn boek met een beargumenteerd pleidooi voor ander wiskundeonderwijs, tégen onbevoegde docenten, vóór veel *CUN*-opdrachten met ict-toepassingen en het vertellen van verhalen over wiskunde en haar helden.

Wiskundigen mogen niet huilen is een echte aanrader. Het laat u nadenken over uw eigen functioneren als docent en geeft inzicht in frappante parallellen tussen topsporters en wiskundigen. Kortom, het bevat veel materiaal dat u in uw eigen lessen kunt gebruiken.

Over de recensent

Adri Dierdorp was 32 jaar wiskundedocent in het middelbaar onderwijs. Hij promoveerde in 2013 aan het Freudenthal Instituut op het proefschrift *Learning correlation and regression within authentic contexts.* Tegenwoordig is hij onder andere betrokken bij het Freudenthal instituut, de landelijke NLT werkgroep, *The International Collaboration for Research on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy* (*SRTL*) en de Stichting DUDOCnetwerk. E-mailadres: *a.dierdorp@uu.nl*

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

WISKUNDE UIT DE KRANT

Heeft u ook zin om het wiskundeboek los te laten en het afgesproken programma even te laten voor wat het is? Dat u vanuit wiskundig standpunt bezien een intrigerend stuk in de krant hebt gelezen en de aandrang voelt om de actualiteit de klas in te brengen? Jacques Jansen werd gegrepen door de vragen: hoe hoog zijn de olieopbrengsten van IS werkelijk, worden we intelligenter en hebben oudere mensen echt grotere oren?

Olieopbrengsten

In *de Volkskrant* van 8 december 2015 las ik de dagelijkse *Voetnoot* van columnist Arnon Grunberg. Zie figuur 1.
IS was en is nog steeds actueel. Bent u niet benieuwd naar de reacties van de leerlingen nadat ze tijd gekregen hebben om de voetnoot goed door te lezen en om met elkaar te overleggen? De vraag is ook: hoe kaart je zo'n stuk bij de leerlingen aan? Zeg je als docent van te voren al: wat is er raar aan dit stuk? Of laat je de leerlingen zelf ontdekken dat dit stuk vragen oproept? De oplettende krantenlezer zal de winst van anderhalf miljoen dollar opmerkelijk gevonden hebben. Dat overkwam ook ene Evert de Zoeten uit Zwolle. Een citaat uit zijn reactie op 10 december: 'Alhoewel dat dus dagelijks maximaal 720 duizend dollar oplevert, maakt IS daar toch 1-tot 1,5 miljoen dollar winst mee.'
Bij het lezen van de voetnoot kwamen bij mijzelf de volgende vragen naar boven.

- wat kun je over de opbrengst of de winst van de verkochte olie zeggen?
- kun je een schatting van de maximale winst geven?
- met welke factor zit Arnon Grunberg er met zijn geschatte winst naast?

Arnon Grunberg had vast de nodige reacties gehad want op 17 december besteedde hij er weer een voetnoot aan. Een citaat: 'Deze wat verwarrende cijfers kwamen uit Globes, de Israëlische Financial Times. Wellicht is verwarring ontstaan doordat de olieprijs fluctueert.' Stel dat de olieprijs fluctueert. De volgende vraag ligt voor de hand: geef een schatting van de olieprijs per vat om aan een winst van anderhalf miljoen dollar te komen.

Worden we intelligenter of is het niveau verlaagd?

Het volgende stuk komt uit *de Volkskrant* van 10 juni 2015. Het was de *Brief van de dag* van een historicus uit Venlo. Ook deze tekst lijkt me geschikt voor uw leerlingen, zie figuur 2. Ook nu is het weer de vraag wat uw leerlingen zouden willen weten over deze ingezonden brief. Er zijn uitspraken over het IQ die vragen om wiskundig gecontroleerd te worden.

- van een gemiddeld IQ is sprake tussen 90 en 110. In deze categorie valt ongeveer de helft van de bevolking;
- 25% van de bevolking heeft een IQ van 110 of hoger.

Controleren kan vrij gemakkelijk als de standaarddevi-

figuur 1

Het Duitse parlement heeft een missie van het Duitse leger tegen IS goedgekeurd. Obama kondigde aan dat de bombardementen tegen IS worden verhevigd. Overigens twijfelen Amerikaanse geheime diensten aan de effectiviteit van die bombardementen.

Tegelijkertijd berichtte *Globes*, de Israëlische *Financial Times*, dat Israël een van de belangrijkste afnemers is van olie die uit door IS gecontroleerde gebieden wordt gesmokkeld. Met hulp van Turkse en Koerdische smokkelaars; officieel zijn Turken en Koerden vijanden van IS.

IS produceert 20.000 tot 40.000 vaten olie per dag, waarmee tussen een en anderhalf miljoen dollar winst per dag wordt geboekt. Olie van IS wordt verkocht voor tussen 15 en 18 dollar per vat, ver onder de officiële olieprijs.

Nee, IS is geen zionistische uitvinding, maar het Westen, ik reken Israël maar even tot het Westen, financiert de vijand, door zaken met IS te doen of met sponsors van IS zoals sommige Golfstaten en Saoedi-Arabië.

Arnon Grunberg

Worden we intelligenter?

Minister Bussemaker van Onderwijs stoort zich eraan dat iedereen alleen maar hogerop wil. Met een vwo- diploma wil iedereen naar de universiteit. Zou dit geen gevolg kunnen zijn van jarenlang overheidsbeleid?

Nederland wil, om Europese doelstellingen te halen, een concurrerende kenniseconomie zijn. Dit heeft zich vertaald in het streven om per 2020 meer dan 40 procent hoger opgeleiden te hebben. In 2013 was al 42procent van de Nederlanders hoger opgeleid. Er is iets vreemds met deze doelstelling.

Opleidingsniveau correleert met intelligentie (IQ). Hoe intelligenter iemand is hoe groter de kans dat hij hoger opgeleid is. Een IQ van 100 is gemiddeld, dat betekent dat de helft van de bevolking er boven zit en de andere helft eronder. Van een gemiddeld IQ is sprake tussen 90 en 110. In deze categorie valt ongeveer de helft van de bevolking. Als we aannemen dat je IQ voor hoger onderwijs bovengemiddeld moet zijn, dan hebben we het over een IQ van 110 en hoger, en in die categorie bevindt zich slechts 25 procent van de bevolking. Fors minder dan de doelstelling.

Worden we intelligenter of is het niveau verlaagd? Ik hoop het eerste, maar vrees het laatste. Als we terugkijken naar de jaren negentig van de vorige eeuw dan valt op dat het opleidingsniveau toen de verdeling van het IQ weerspiegelde. Zou het gedaalde niveau van de opleidingen de oorzaak ervan kunnen zijn dat universitair onderwijs voor steeds meer jeugdigen haalbaar is?

Stoort de minister zich, met andere woorden, niet aan een doelstelling die mooi klinkt maar vloekt met de werkelijkheid.

Frans Kuijpers, Venlo, historicus

figuur 2

atie bekend is. De leerlingen kunnen deze afleiden uit een van de twee uitspraken. Of nagaan of de twee beweringen gelijkwaardig zijn aan elkaar. Maar het belangrijkste is toch wel om na te denken over de uitspraak: Opleidingsniveau correleert met intelligentie (IQ). Natuurlijk is er ook nog de vraag hoe hoog het IQ moet zijn zodat in 2020 meer dan 40 % van de mensen hoog opgeleid is én welke aannames we hierbij maken.

Hebben oudere mensen echt grotere oren?

Hier wordt melding van gemaakt door Ellen de Visser in *de Volkskrant* van 22 september 2014. Zie figuur 3 voor een deel van haar artikel Ook dit is een interessant artikel om aan uw leerlingen voor te leggen. Misschien denkt u wel dat een 4 vwo-leerling toch meteen moet zien

figuur 3

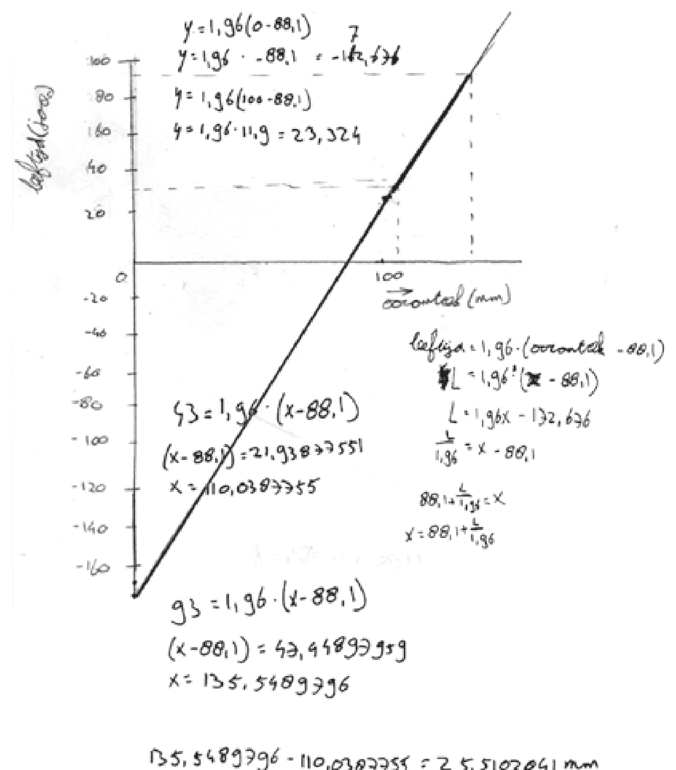
Het was een Britse huisarts die twintig jaar geleden als eerste oren begon op te meten. Hij analyseerde gegevens van tweehonderd patiënten tussen de 30 en de 93 jaar en stelde vast dat oren inderdaad groter worden. Vanaf het begin van de volwassenheid zou er jaarlijks gemiddeld 0,22 milimeter bij komen, wat in 50 jaar een centimeter extra oplevert. Zijn bevindingen werden bekrachtigd door Duitse en Italiaanse oren. Amerikaanse wetenschappers stelden zelfs een formule op: leeftijd = 1,96 x (ooromtrek in millimeters -88,1).

dat zo'n formule *leeftijd* = 1,96 □ *(ooromtrek in millimeters* – 88,1*)* klinkklare onzin is, omdat het zou betekenen dat we allemaal dezelfde ooromvang hebben. Of gaat het om de formule van één persoon? In ieder geval leert mij een onderzoekje op internet hoe vaak journalisten voor ons relevante informatie weglaten. Bijvoorbeeld wat is de echte betekenis van die woorden leeftijd en ooromtrek in die woordformule? Bij een forensisch onderzoek spreken we al over geschatte leeftijd van de overledene.
We leven in een periode dat we met *big data* aan de slag kunnen. Vermoedelijk hebben de Amerikaanse onderzoekers een lineaire regressievergelijking opgesteld op basis van een hoop verzamelde gegevens. Een paar maanden geleden liet ik Bart, die bijles bij mij heeft, het artikel lezen. Bart zit in 6 vwo en volgt wiskunde B. En onlangs heb ik het Damien uit 5 vwo, ook een wiskunde B leerling, laten lezen. Beide wiskunde B leerlingen hebben grote moeite om zich een beeld te vormen bij de woordformule.

Gesprek met Damien

Ik stel aan hem de hamvraag nadat hij rustig het artikel heeft kunnen lezen: 'Wat zou je, wiskundig gezien, willen weten?' 'Ik denk dat die formule hier van belang is', zegt Damien. 'Is het artikel interessant voor in de les', vraag ik aan hem. 'Ja', antwoordt hij. 'Je zou niet denken dat oren groter worden.' 'Heb je een beeld bij die formule?' 'Neen', zegt Damien. Ik ga Damien helpen. 'Wat voor soort verband hoort bij die formule?' 'Een lineair verband, meneer.' 'Heb je nu een beeld?' 'Ja, een rechte lijn.'
Daarna vraag ik aan hem om het allemaal preciezer te

figuur 4



tekenen en om de leeftijden te beperken van 30 tot en met 93 jaar. Zie figuur 4. Net, als eerder bij Bart uit 6 vwo, gaat het moeizaam.

Opvallend is dat beide leerlingen, in hun schets, een halflijn tekenen vanuit het snijpunt van de assen. Aan Damien vraag ik: 'Wat moet je weten om een rechte lijn te tekenen?' Hij kiest er voor om de coördinaten te berekenen van twee punten. Hij kiest de leeftijden 0 en 100 uit. Ik wijs Damien op de betekenis van de uitkomsten. Ik vraag later aan hem om de gemiddelde ooromtrek uit te drukken in de leeftijd en om na te gaan of de oren bij het Amerikaanse onderzoek in 50 jaar ongeveer één cm groeien. In eerste instantie weet hij niet wat hij moet doen. Gemiddeld neemt jaarlijks de ooromtrek toe met 0,22 mm. Ik vraag aan Damien of dit in overeenstemming is met de woordformule van de Amerikaanse onderzoekers. Ik heb gemerkt dat je vaak als antwoord 1,96 mm krijgt. En wat is de uitkomst bij u?



figuur 5 Een bezoeker legt zijn oor te luister (Vrijthof, Maastricht)

Tot slot

Kunnen leerlingen uit 4 vwo zo'n artikel aan? Het mag wiskunde A of B zijn. Wat denkt u, lezer. In ieder geval blijken Bart en Damien de grootste moeite te hebben met het werken met de woordformule. Deze leerlingen vormen natuurlijk geen aselecte groep. Hoe hebben die Amerikaanse wetenschappers naar alle waarschijnlijkheid die formule gevonden? En in 50 jaar zou er bij de ooromtrek gemiddeld 25,5 mm bijkomen, zeg maar ruim 2,5 cm. Zouden Amerikaanse oren sneller groeien dan bij die van de patiënten van die Britse huisarts?

Over de auteur

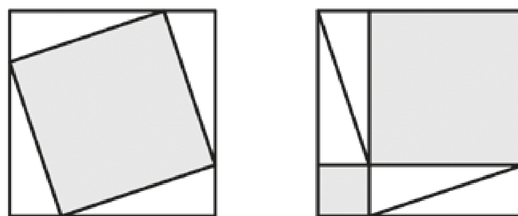
Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

BRUGKLASSERS ONTDEKKEN PYTHAGORAS

Jeroen Spandaw

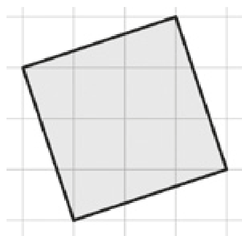
De stelling van Pythagoras is misschien wel de beroemdste stelling uit de schoolwiskunde. $a^2 + b^2 = c^2$, wordt er meestal meteen bij geassocieerd. Jeroen Spandaw laat zien dat je met het bewijzen van de stelling van Pythagoras mooi wiskundeonderwijs kunt maken, ook in de brugklas.

In de zomer van 1984 tussen mijn vwo-examen en de start van mijn wiskundestudie vroeg een klasgenoot of ik de stelling van Pythagoras kon bewijzen. Ik kon dat niet. Ik had er ook nooit over nagedacht en ik had ook geen idee welk soort argument als bewijs zou kunnen gelden. In mijn wiskundestudie werd lengte via het inproduct in feite gedefinieerd als de wortel van sommen van kwadraten. Pythagoras gold nu dus zo ongeveer per definitie. Een kwart eeuw later las ik Euclides' bewijs als voorbereiding op een meetkundecollege voor leraren in opleiding. Dat bewijs had ik in de zomer van 1984 zeker nooit zelf kunnen vinden. Op school hadden we wat vectormeetkunde gehad bij wiskunde II, maar redeneren met congruentiecriteria behoorde niet tot mijn repertoire. Gelukkig zijn er andere bewijzen die wel eenvoudig te begrijpen zijn voor leerlingen, zoals het bekende legpuzzelbewijs, zie figuur 1.



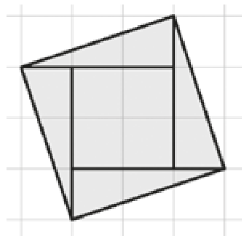
figuur 1 Legpuzzelbewijs

Maar is het ook mogelijk om leerlingen *zelf* een bewijs van Pythagoras te laten ontdekken? Nog beter: kunnen ze zelf de *stelling* ontdekken? Liefst zo jong mogelijk en liefst zo veel mogelijk op eigen kracht. Toen ik les mocht geven aan een groep hoogbegaafde brugklassers gaf ik hen de opdracht om de oppervlakte van het vierkant in figuur 2 te bepalen.



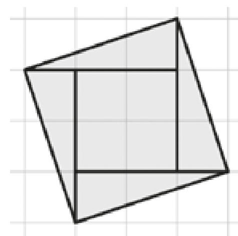
figuur 2 Scheef vierkant

Het vierkant was gegeven op ruitjespapier, de hoekpunten liggen in roosterpunten. De leerlingen kwamen er snel uit. ‘Gewoon vakjes tellen’, zeiden ze. ‘Maar door sommige vakjes loopt een schuine lijn’, wierp ik tegen. Maar ook dat was geen probleem.
Leerlingen tekenen hulplijntjes, zie figuur 3, en vonden keurig netjes 4 + 4 × 3/2 = 10 voor de oppervlakte. De formule ½ × basis × hoogte voor de oppervlakte van een driehoek heb je niet eens nodig, want zo lastig is het nou ook weer niet om te zien dat de oppervlakte van de driehoeken de helft van een rechthoek van 3 bij 1 is.
Uiteraard heb ik mijn leerlingen andere vergelijkbare vierkanten gegeven – ze hadden ze ook zelf kunnen bedenken – en natuurlijk werkte dezelfde methode.



figuur 3 Hulplijnen

Hadden mijn brugklassers nu de stelling van Pythagoras ontdekt? Ik vind van wel, tot op zekere hoogte. Weliswaar was nergens een som van kwadraten te bekennen, die voor Pythagoras onontbeerlijk lijkt, maar mijn leerlingen hadden wel een methode ontdekt om de oppervlakte van scheve vierkanten op ruitjespapier te ontdekken. Dat is ook een vorm van Pythagoras. Er zijn drie verschillen met de gebruikelijke versie. Ten eerste gaat deze versie niet over de lengte van een zijde, maar over de oppervlakte van een vierkant. Euclides dacht daar zelf ook zo over en bovendien heb je dan geen wortels nodig. Ten tweede hebben we alleen vierkanten bekeken waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn. Ten derde hebben de leerlingen geen expliciete formule voor de oppervlakte gevonden, maar een algoritme. Later op die dag liet ik leerlingen uit mijn 3 vwo klas ook de oppervlakte van zo’n vierkant op ruitjespapier bepalen. Hier tekenden sommige leerlingen de hulplijnen buiten het vierkant als in figuur 4, maar ook zij vonden het goede antwoord.
In de derde klas gingen we uiteraard verder dan rekenvoorbeelden. In plaats van ½ × 3 × 1 voor de oppervlakte van een driehoekje in figuur 2 of 3 kregen we ½ *ab*. Het vierkantje met zijde 2 uit figuur 2 had nu zijde $a - b$. In plaats van 4 + 4 × 3/2 vonden we $(a - b)^2 + 4 \times ½\, ab$. Uitwerken geeft $a^2 + b^2$ voor de oppervlakte. De methode van figuur 3 leidde via $(a + b)^2 - 4 \times ½\, ab$ tot hetzelfde resultaat. Hé, de stelling van Pythagoras!



figuur 4 Andere hulplijnen

Daarna liet ik het legpuzzelbewijs uit figuur 1 zien. Pythagoras kun je dus zonder algebra, puur meetkundig bewijzen. Met wat hints is dat bewijs ongetwijfeld ook voor leerlingen te herontdekken. Bovendien geeft het de relatie tussen de oppervlakte van de drie vierkanten bij een rechthoekige driehoek en zijn er geen roosterpunten nodig. Waarom dan toch dat gereken in de eerste klas en die algebra in de derde klas? Omdat leerlingen nu *zelf* de hulplijntjes hebben bedacht, omdat rekenen en algebra ook op het menu staan, en om te laten zien (in 3 vwo) dat een bewijs in een bijzonder geval soms eenvoudig te generaliseren is door met letters te rekenen in plaats van met getallen. Er zijn geen nieuwe meetkundige ideeën nodig. Het algemene bewijs met variabelen is volstrekt analoog aan de berekening in het speciale geval met getallen. Mijn collega Wim Caspers en ik zijn daarom van mening dat dergelijke voorbeeldige bewijzen van speciale gevallen ook op het centraal schriftelijk examen punten verdienen.

Over de auteur

Jeroen Spandaw is lerarenopleider en universitair docent wiskunde aan de TU Delft.
E-mailadres: *j.g.spandaw@tudelft.nl*

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

UITDAGING

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



A° 19$\frac{53}{54}$

Deze keer twee opgaven uit 1953 en 1954 die mooi passen in het nieuwe vwo-programma. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u ze wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerking aan.

Opgave 1

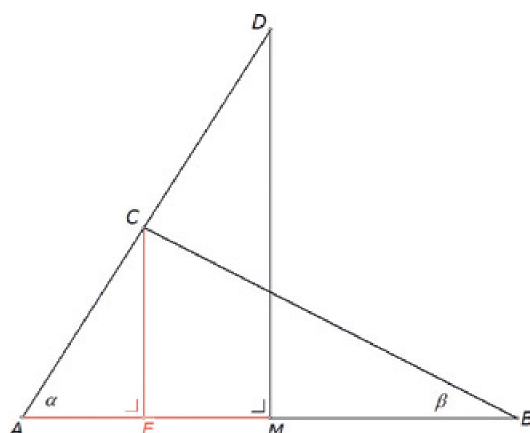
Van driehoek ABC is $\beta < \alpha < 90°$. De middelloodlijn van AB snijdt het verlengde van AC in D.
Gegeven is $CD = p \cdot AC$, p stelt een positief getal voor.

a. Bewijs: $\tan\alpha = (2p + 1)\tan\beta$.
b. Bereken de hoeken van driehoek ABC als $p = 1$ en $\gamma = 80°$.

Opgave 2

Op een rechthoekig assenstelsel zijn gegeven de punten $A(2a, 0)$ en $B(0, a)$ waarin a positief is. Een veranderlijke rechte l door B snijdt de x-as in P. M is het middelpunt van de cirkel die door A gaat en de rechte l in P raakt. Bepaal de meetkundige plaats van het punt M, als l om B draait (vergelijking, aard, ligging). Verklaar de snijpunten van de meetkundige plaats met de x-as *meetkundig*.

figuur 1



Uitwerking opgave 1
Eerst een tekening, zie figuur 1.
Stel $AC = b$ en $AB = c$. Dan is $AD = (p + 1)\cdot b$ en

$AM = BM = \frac{1}{2}c$.

Het ligt voor de hand om hoogtelijn CE te tekenen, de driehoeken ACE en ADM zijn gelijkvormig (hh).
Nu moet opgave a lukken, toch?
Probeert u het nu eerst even zelf?

------- denk denk -------

Uit de gelijkvormigheid volgt: $AE\cdot(1 + p) = AM = \frac{1}{2}c$, dus $AE = \frac{c}{2+2p}$.

$EM = p \cdot AE = \frac{cp}{2+2p}$, zodat

$BE = BM + ME = \frac{1}{2}c + \frac{cp}{2+2p} = \frac{c+2cp}{2+2p}$.

$\tan\alpha = \frac{CE}{AE}$, daaruit volgt $CE = AE \cdot \tan\alpha = \frac{c\tan\alpha}{2+2p}$.

$$\tan\beta = \frac{CE}{BE} = \frac{\frac{c\tan\alpha}{2+2p}}{\frac{c+2cp}{2+2p}} = \frac{\tan\alpha}{1+2p}.$$

Hiermee is onderdeel a klaar.

Vul $p = 1$ in, en je krijgt $\tan\alpha = 3\tan\beta$. Omdat $\gamma = 80°$, is $\alpha + \beta = 100°$, zodat we een vergelijking met een onbekende overhouden: $\tan\alpha = 3\tan(100° - \alpha)$. Oplossen kan met snijpuntbepaling op de grafische rekenmachine. Maar kunt u het ook algebraïsch?

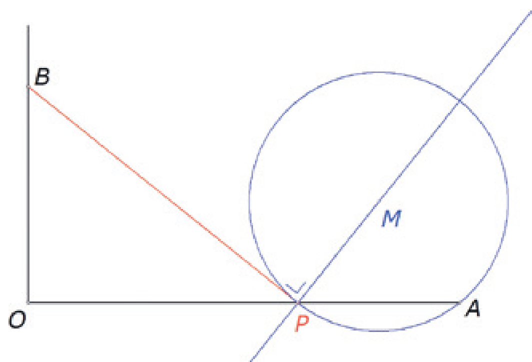
Ik deed het zo:
Een van de somformules is $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$,

zodat we krijgen $\tan\alpha = 3 \cdot \frac{\tan 100° - \tan\alpha}{1 + \tan 100° \tan\alpha}$.

Stel $\tan\alpha = p$, dan volgt hieruit de kwadratische vergelijking $\tan(100°) \cdot p^2 + 4p - 3\tan(100°) = 0$ met

uitkomsten $p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 3\tan^2(100°)}}{2\tan(100°)}$.

Dus $p \approx -1{,}4149... \vee p \approx 2{,}1202....$ De positieve p-waarde geeft uiteindelijk $\alpha \approx 64{,}749°$.



figuur 2

Uitwerking opgave 2

Eerst een tekening, zie figuur 2.

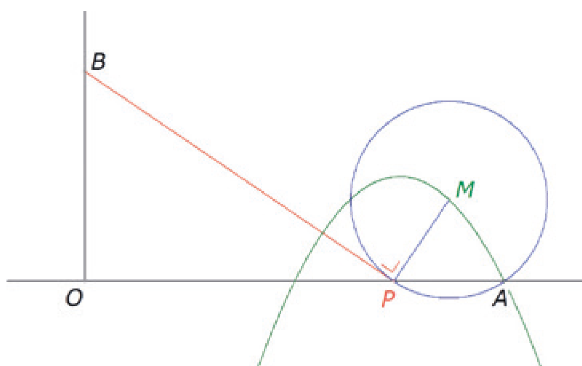
Stel lijn l heeft vergelijking $y = c \cdot x + a$, dan is $P = (-\frac{a}{c}; 0)$, en de lijn PM wordt $y = -\frac{1}{c}(x + \frac{a}{c})$, zodat $M = (\lambda; -\frac{1}{c}(\lambda + \frac{a}{c}))$.

$$MP^2 = \left(\lambda + \tfrac{a}{c}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{c}(\lambda + \tfrac{a}{c})\right)^2.$$

$$MA^2 = (\lambda - 2a)^2 + \left(-\tfrac{1}{c}\left(\lambda + \tfrac{a}{c}\right)\right)^2.$$

$$MA = MP \text{, dus } \left(\lambda + \tfrac{a}{c}\right)^2 = \left(\lambda - 2a\right)^2.$$

figuur 3



Hieruit volgt $c = \frac{a}{2a - 2\lambda}$ □ $c = -\frac{1}{2}$.

$c = \frac{a}{2a - 2\lambda}$ geeft:

$$\begin{cases} x_M = \lambda \\ y_M = \frac{2\lambda - 2a}{a}(\lambda + 2a - 2\lambda) = \frac{2}{a}(-\lambda^2 + 3a\lambda - 2a^2) \end{cases}$$

Eliminatie van λ geeft de parabool

$$y = -\tfrac{2}{a}(x^2 - 3ax + 2a^2).$$

$c = -\frac{1}{2}$ geeft:

$$\begin{cases} x_M = \lambda \\ y_M = 2(\lambda - 2a) \end{cases}$$

Eliminatie van λ geeft de lijn $y = 2x - 4a$. In figuur 3 een tekening met een parabool.

Deze parabool snijdt de horizontale as in $(a, 0)$ en $(2a, 0)$. M ligt hier als P samenvalt met de oorsprong of punt A. Wanneer l door A gaat, valt P samen met A, en geldt automatisch $MP = MA$ voor elk punt op de loodlijn op BP. Vandaar deze lijn (door A, loodrecht op AB) als tweede deel van de gevraagde meetkundige plaats.

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958).* Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

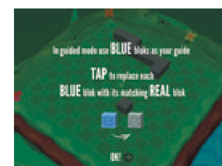
Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

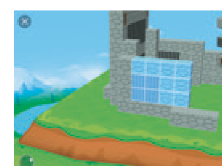
RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

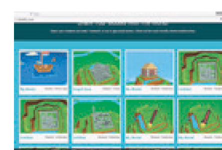
Lonneke Boels

BLOKIFY

Blokify is een app waarmee je het ruimtelijk inzicht van leerlingen kunt ontwikkelen. Het basisidee is heel simpel: bouw met blokjes jouw droomhuis, kasteel, piramide, enzovoorts. Wat de app bijzonder maakt, is dat je het gemaakte bestand vervolgens kunt sturen naar een 3D-printer. Lonneke Boels ging met de app aan de slag en beschrijft haar ervaringen.







figuur 1 Uitleg werking app
figuur 2 Bouwen van een kasteelpoort
figuur 3 Drie voorbeelden van de website van gebouwen en schepen die met *Blokify* zijn gemaakt

Je begint het programma met een *guided* les waarin je de werking van de app leert, zie figuur 1. Daarna kun je modellen met hulp nabouwen of vrij bouwen. Voor het vrij bouwen kun je kiezen uit heel veel verschillende thema-bouwstenen en een aantal verschillende achtergronden, waaronder dus een berg en water. De voorbeelden verschillen van een futuristische stad tot een ruimte-platform en van een piramide tot een vervloekt eiland en schepen. De blauwe blokken moeten in de *guided* les worden vervangen door de bijbehorende blokken, in figuur 2 zijn dit de grijze blokken. Rechtsboven in de figuur zie je welk blok op dit moment wordt gebruikt. Alleen de gebruikte blokken worden in het menu getoond. De andere blokken zijn via een menu toe te voegen door op het blok dat omcirkeld is te tappen. De bestanden kunnen worden gemaild in stl- of vrml-formaat. Als je geen 3D-printer tot je beschikking hebt, kun je de bestanden ook naar de makers mailen en dan krijg je het model geprint opgestuurd. Deze optie heb ik niet uitgetest. Het printen kan ik volgend schooljaar bij mij op school uittesten als de nieuwbouw klaar is, met een prachtige werkplaats voor handvaardigheid, onderzoek en ontwerpen, en techniek. De wiskunde uit de app sluit aan bij applets als *Bouwen met blokken* op het *rekenweb* en *wisweb*. Leerlingopdrachten bij of uit deze applets kunnen worden gebruikt of aange-past om opdrachten bij dit programma te geven. Het programma kan bijvoorbeeld geschikt worden gemaakt voor klas 1 van havo/vwo door een plattegrond met hoogte-getallen te geven en leerlingen dit bouwwerk te laten nabouwen of door alleen het voor- en zijaanzicht te geven en te vragen om zoveel mogelijk verschillende gebouwen te maken die aan de eisen van het voor- en zijaanzicht voldoen (met één type blokjes).

Pluspunten

- het nabouwen sluit aan bij de stof van de eerste klas op het gebied van ruimtelijke vormen;
- de modellen zien er op de iPad prachtig uit;
- hoewel het basisidee simpel is, is er veel mogelijk. Wie kan de moeilijkste vorm bouwen?
- de mogelijkheid om een model 3D te laten printen zal veel leerlingen aanspreken;
- het programma maakt het mogelijk om zonder veel kennis van tekenprogramma's zoals SketchUp te werken. Dit maakt het toegankelijk voor collega's die nog nooit met zo'n programma of een 3D-printer hebben gewerkt;
- het programma werkt zeer intuïtief;
- stl is een veel gebruikt format voor bestanden voor 3D-printers. Als je printer dit niet aankan, moet je misschien *slicen*.

Minpunten

- zonder bijbehorende opdrachten kan het bouwen erg simpel zijn;
- voor een effectieve inzet is lesmateriaal of een lesop-dracht (waarschijnlijk) nodig;
- het laten printen van alle bouwwerken is kostbaar. Het kan als prijs in een wiskundecompetitie worden ingezet;
- er is geen hulp of extra uitleg;
- bij het nabouwen van een kasteel via de *guided optie*, liep ik vast. Er komen geen nieuwe voorbeelden meer van wat ik kan bouwen en ik ben er nog steeds niet achter wat ik fout doe. Mogelijk is dit een bug;
- het programma werkt traag als je iets anders doet dan bouwen, bijvoorbeeld bij het mailen van een bestand.

Geschikt voor: basisschool groep 7 en 8, vmbo onderbouw, havo/vwo klas 1
Eindoordeel: aanschaffen
Kosten: €3,99
Getest op: iPad 3 met iOS 9.2.1 Het 3D-printen is niet getest.
Makers: Jenny Kortina en Brett Cupta, *http://blokify.com/*
Video: *https://vimeo.com/76463363*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen. E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

VASTGEROEST

NOT THE DUTY, BUT THE BEAUTY

Ab van der Roest

Ab van der Roest was deze zomer op de *CIEAEM* conferentie (*International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching*, maar dan in het Frans). De openingszin inspireerde Ab tot een bespiegeling over de mogelijke missie van iedere wiskundedocent. Via een citaat uit 1865…



figuur 1

Not the duty, but the beauty. Dat waren woorden die gesproken werden bij de opening van een congres over wiskundedidactiek dat ik bijwoonde in de zomer van 2015. Een congres georganiseerd door *CIEAEM* in Aosta (Italië). Het kost een vakantieweek, maar wat krijg je daar veel voor terug. Het is goed mogelijk dat dit, naast de vakantiecursus georganiseerd door PWN, een vast onderdeel van mijn komende zomervakanties gaat worden. Terug naar de titel. Waarom schreef ik het op? Eerst natuurlijk omdat ik het wel herken. Maar ook omdat het door weinig leerlingen herkend wordt. Het is misschien wel een van de belangrijkste taken van de wiskundeleraar om de schoonheid te laten zien. Enthousiasme als er iets moois gebeurt. Ik moest ook denken aan Multatuli. Dan denk je misschien dat het niets met wiskunde te maken heeft, maar dan vergis je je. Multatuli hield een soort dagboek bij, waarin hij allerlei waarnemingen noteerde. Deze aantekeningen werden door Multatuli *Ideeën* genoemd en genummerd. Ze betroffen allerlei waarnemingen. Nummer 529 gaat over de stelling van Pythagoras. Hij vond een fraaie bewijs, zie figuur 1.

Interessanter is echter wat Multatuli er aan toevoegde:

'Na dit bewys gevonden te hebben, vernam ik dat er een werkje bestond, waarin dit onderwerp werd behandeld. Ik schafte my dat boekje aan en vond er myn demonstratie niet in. Ook meen ik dat geen der daarin voorkomende bewyzen zoo aanschouwelyk en helder is als 't myne. Wie beweeren mocht dat het reeds vroeger was gevonden, zou me verplichten met de opgave waar het gepubliceerd is? Professor Hofmann kende 't niet, en ook Strootman zou er wel melding van gemaakt hebben, als 't hem bekend ware geweest. Hofmann schynt een speciale studie te hebben gemaakt zoowel van de propositie zelve, als van de litteratuur over dit onderwerp.Ik hoop dat niemand vragen zal welk nut het heeft, te zoeken naar eenvoudiger bewyzen voor 'n bekende waarheid? Dit streven leidt tot helderheid van opvatting, en gewent ons aan duidelyke voorstelling. "Bien poser une question, c'est presque la résoudre." Dit geldt zoowel in menschkunde, moraal, politiek, enz. als in de eigenlyk gezegde wiskunde. De natuur kent al die onderscheidingen niet. Zy streeft -- onbewust -- met één middel naar één doel, en er is verband tusschen de helderheid van myn bewys voor de stelling van Pythagoras, en de eenvoudigheid der geloofsbelydenis die ik neerlegde in de vertelling over Lystermannetje.'

Not the duty, but the beauty is dus ook het credo van Multatuli.



figuur 2

NB Eens in de vier jaar is er geen *CIEAEM* conferentie, de hele internationale wiskundedidactiek wereld komt dan bij elkaar op het vierjaarlijkse grote *ICME* congres, dat dit jaar in Hamburg gehouden wordt. Zie *www.icme13.org*. En zien we daar niet een verwaaide Stelling van Pythagoras in het logo (figuur 2) staan?

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: rst@ichthuscollege.nl

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Marjanne Klom, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2016

do 17/3

wo 23/3

vr 8/4

wo 20/4

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 91

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	10 mei 2016	7 APRIL 2016
7	28 juni 2016	2 mei 2016

JAARGANG 92

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	13 september 2016	21 juni 2016

Adv Casio

Adv Noordhoff